EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.

AUCTORE

HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.

OPUSCULUM

EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

EX.MO SENATUI MEDIOLANENSI

Hieronymus Saccherius e Soc. Jesu

F.

EUclidem ab omni nævo vindicatum, ſupplicem vobis ſiſto, PP. Sapientiſſimi; quibus nempe quotidiano veluti uſu compertiſſimum eſt, quanti in unaquaque diſciplinâ interſit, earum prima quædam dogmata inconcuſſa, atque immota conſiſtere, ne tota ſuperextructæ inquiſitionis machina, inopino caſu, funditùs evertatur. Id enim in ipsâ Divini, Humanique Juris ſcientiâ, quæ Ampliſſimi Ordinis Veſtri præcipuum decus eſt, rerumque maxima-rum arbitra, ac moderatrix ſedet, perſpectum ſatis habere poteſtis. Hæc enim niſi æquiſſimis Principum Legibus, Sapientiumque Reſponſis, quæ vim legis, ac pondus ipſâ humani generis approbatione meruerunt, quibuſdam veluti baſibus niteretur, quanta emergeret in jure dicendo nunquam vincenda perplexitas, quot in Foro inextricabiles tenebræ, quàm infelix perturbatio publicæ felicitatis! Et hæc quidem cautio, cum in omni diſciplinarum genere locum habet, tum præcipuè in Mathematicis diligentiùs adhibenda eſt, unde omne opinandi arbitrium exulat, ſoloque principiorum, ac conſecutionum inſeparabili nexu elicitur manifeſta, ac compertiſſima veritas. Eâ de causâ inſignes Geometræ, tum prioribus illis, tum etiam ad hanc uſque ætatem noſtram conſequentibus ſæculis, Matheſeos Elementa ad exactiſſimæ firmitatis leges redigere ſtuduerunt; eo tamen conatu, qui & mihi (abſit verbo invidia) exercendi ingenii, pro muneris mei ratione, facultatem reliquerit, ac excitaverit voluntatem. Quo ſucceſſu, Eruditorum judicium erit. Me certè, ſi audire quempiam in re ſuâ decet, non pœnitet laboris mei; qui ut latiùs promanaret, atque exciperetur libentiùs, cui niſi Excelſo Ordini Veſtro, PP. Ampliſſimi, ſacran-

dus

dus erat, qui Vestri Nominis gloriam splendore sanguinis, Doctrinæ eminentiâ, virtutum merito superatis? Hoc itaque alterum, post Neostaticam, summi in vos obsequii mei, pignus, ac monumentum excipite; quodque caput est: Authorem ipsum habete, quamdiu vivet, vobis Addictissimum.

IGNATIUS VICECOMES
SOCIETATIS JESU
In Provincia Mediolanensi Præpositus Provincialis.

CUm librum, cui titulus *Euclides ab omni nævo vindicatus* a P. Hieronymo Saccherio nostræ Societatis Sacerdote conscriptum, aliquot ejusdem Societatis Theologi recognoverint, & in lucem edi posse probaverint; facultate nobis a R. P. Nostro Præposito Generali Francisco Retz communicata, concedimus ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat, ita videbitur: Cujus rei gratiâ has litteras manu nostra subscriptas, sigilloque nostro munitas dedimus. Mediolani 16. Augusti 1733.

IGNATIUS VICECOMES.

Loco ✠ Sigilli.

DOn Gaspar a Basilica-Petri Sacræ Theologiæ, ac Juris utriusque Doctor, S. Offitii Revisor, ex jussu Reverendissimi Patris Magistri Sylvestri Martini Inquisitoris Generalis Mediolani, vidi, & attentè legi Librum, cui titulus, Euclides ab omni nævo vindicatus, Auctore Hieronymo Saccherio Societatis Jesu &c. nihilque in eo reperi contra Fidem Orthodoxam; neque contra bonos mores, ac ideo posse prælo mandari censeo &c.

Die 13. Julii 1733.

IMPRIMATUR

F. Sylvester Martini Ord. Præd. Inquisitor Generalis Mediol.

Franciscus Curionus S. Eusebii Archipresb. pro Eminentiss. & Reverendiss. D. D. Card. Odescalco Archiep.

Carlius pro Excellentissimo Senatu.

PROŒMIUM AD LECTOREM.

Quanta sit Elementorum Euclidis præstantia, ac dignitas, nemo omnium, qui Mathematicas disciplinas noverint, ignorare potest. Lectissimos hanc in rem testes adhibeo Archimedem, Apollonium, Theodosium, aliosque penè innumeros, ad hæc usque nostra tempora rerum Mathematicarum Scriptores, qui non aliter hæc Euclidis Elementa usurpant, nisi ut principia jam diu stabilita, ac penitus inconcussa. Verùm tanta hæc nominis celebritas vetare non potuit, quin multi ex Antiquis pariter, ac Recentioribus, iique Magni Geometræ nævos quosdam a se deprehensos censuerint in his ipsis pulcherrimis, nec unquam satis laudatis Elementis. Tres autem hujusmodi nævos designant, quos statim subnecto.

Primus respicit definitionem parallelarum, & sub ea Axioma, quod apud Clavium est decimumtertium Libri primi, ubi Euclides sic pronunciat: Si in duas rectas lineas, in eodem plano existentes recta incidens linea duos ad easdem partes internos angulos minores duobus rectis cum eisdem efficiat, duæ illæ rectæ lineæ ad eas partes in infinitum protractæ inter se mutuò incident. *Porrò nemo est, qui dubitet de veritate expositi Pronunciati; sed in eo unicè Euclidem accusant, quòd nomine Axiomatis usus fuerit, quasi nempè ex solis terminis ritè perspectis sibi ipsi faceret fidem. Inde autem non pauci (retentâ cæteroquin Euclidæâ parallelarum definitione) illius demonstrationem aggressi sunt ex iis solis Propositionibus Libri primi Euclidæi, quæ præcedunt vigesimam nonam, ad quam scilicet usui esse incipit controversum Pronunciatum.*

Sed rursum; quoniam antiquorum in hanc rem conatus visi non sunt adamussim scopum attingere; factum idcircò est, ut multi proximiorum temporum eximii Geometræ, idem pensum aggressi, necessariam censuerint novam quandam parallelarum definitionem. Itaque; cum Euclides parallelas rectas lineas definiat, quæ in eodem plano existentes, si in utramque partem in infinitum producantur, nunquam inter se mutuò incidunt; *postremis expositæ definitionis vocibus has alias substituunt*: Semper inter se æquidistant; *adeò ut nempè singulæ perpendiculares ab uno quolibet unius illarum puncto ad alteram demissæ æquales inter se sint.*

At nova rursum hinc oritur scissura. Nam aliqui, & ii sanè acutiores, demonstrare conantur parallelas rectas lineas prout sic definitas, unde utique gradum faciant ad demonstrandum sub ipsis Euclidæis vocibus controversum Pronunciatum, cui nimirum ab eâ vigesimâ nonâ Libri primi Euclidæi (pauculis quibusdam exceptis) universa innititur Geometria. Alii verò (non sine magno in rigidam Logicam peccato) eas tales rectas lineas parallelas, nimirum æquidistantes, *assumunt tanquam datas, ut inde gradum faciant ad reliqua demonstranda.*

Et hæc quidem satis sunt ad præmonendum Lectorem super iis, quæ materiam exhibebunt Libro priori hujus mei Opusculi: Nam uberior prædictorum omnium explicatio habebitur in Scholiis post Prop. vigesimam primam enunciati Libri, quem dividam in duas veluti partes. In priore imitabor antiquiores illos Geometras, nihil propterea sollicitus de naturâ, aut nomine illius lineæ, quæ omnibus suis punctis a quadam suppositâ rectâ lineâ æquidistet: Sed unicè in id incumbam, ut controversum Euclidæum Axioma citra omnem petitionem principii clarè demonstrem; nunquam idcircò adhibens ex ipsis prioribus Libri primi Euclidæi Propositionibus, non modò vigesimam septimam, aut vigesimam octavam, sed nec ipsas quidem decimam sextam, aut decimam septimam, nisi ubi clarè agatur de triangulo omni *ex parte circumscripto. Tum in posteriore parte, ad novam ejusdem Axiomatis confirmationem demonstrabo non nisi rectam lineam esse posse, quæ omnibus suis punctis a quadam supposita recta linea æquidistet. Horum autem occasione prima ipsa universæ Geometriæ Principia rigido examini subjicienda hic esse nullus est, qui non videat.*

Transeo ad alios duos nævos Euclidi objectos. Prior respicit definitionem sextam Libri quinti super æquè proportionalibus: Posterior Definitionem quintam Libri sexti super compositione rationum. Hic autem erit secundi mei Libri unicus scopus, ut dilucidè explicem præfatas Euclidæas Definitiones, simulque ostendam non æquo jure hac in parte Euclidis nomen vexatum fuisse.

Prodest tamen rursum præmonere, demonstratum a me iri hac occasione unum quoddam Axioma, quod tutissimè per omnem Geometriam versetur, sine indigentiá illius Postulati, *sub nomine Axiomatis ab interpretibus (ut reor) intrusi, cujus usus incipit ad* 18. *quinti.*

INDICIS LOCO

Addenda censeo, quæ sequuntur.

1. IN I. & II. Propos. Lib. primi duo jaciuntur principia, ex quibus in III. & IV. demonstratur, angulos interiores ad rectam jungentem extremitates æqualium perpendiculorum, quæ ex duobus punctis alterius rectæ, veluti basis, versùs easdem partes (in eodem plano) erigantur, non modò fore inter se æquales, sed præterea aut rectos, aut obtusos, aut acutos, prout illa jungens æqualis fuerit, aut minor, aut major prædictâ basi: Atque ita vicissim. *a pag.* 1

2. Hinc sumitur occasio secernendi tres diversas hypotheses, unam anguli recti, alteram obtusi, tertiam acuti: circa quas in V. VI. & VII. demonstratur, unam quamlibet harum hypothesium fore semper unicè veram, si nimirum deprænendatur vera in uno quolibet casu particulari. *a pag.* 5

3. Tum verò; post interpositas tres alias necessarias Propositiones; demonstratur in XI. XII. ac XIII. universalis veritas noti Axiomatis, respectu habito ad priores duas hypotheses, unam anguli recti, & alteram obtusi; ac tandem in XIV. ostenditur absoluta falsitas hypothesis anguli obtusi. Atque hinc incipit diuturnum prælium adversùs hypothesin anguli acuti, quæ sola renuit veritatem illius Axiomatis. *a pag.* 10

4.

4. Itaque in **XV.** ac **XVI.** demonstratur stabilitum iri hypotheses aut anguli recti, aut obtusi, aut acuti, ex quolibet triangulo rectilineo, cujus tres simul anguli æquales sint, aut majores, aut minores duobus rectis; ac similiter ex quolibet quadrilatero rectilineo, cujus quatuor simul anguli æquales sint, aut majores, aut minores quatuor rectis. *a pag.* 20

5. Sequuntur quinque aliæ Propositiones, in quibus demonstrantur alia indicia pro secernenda vera hypothesi a falsis. *a pag.* 23

6. Accedunt quatuor principalia Scholia; in quorum postremo exhibetur figura quædam geometrica, ad quam fortasse respexit Euclides, ut suum illud Pronunciatum assumeret tanquam per se notum. In tribus prioribus ostenditur non valuisse ad intentum præcedentes insignium Geometrarum conatus. Sed quia controversum Axioma exactissimè demonstratur ex duabus præsuppositis rectis lineis *æquidistantibus*; monet ibi Auctor contineri in eo præsupposito manifestam petitionem *Principii*. Quòd si provocari hìc velit ad communem persuasionem, atque item exploratissimam *praxim*; rursum monet provocari non debere ad experientiam, quæ respiciat puncta infinita, cum satis esse possit unica experientia uni cuivis puncto affixa. Quo loco tres ab ipso afferuntur invictissimæ Demonstrationes Physico-Geometricæ. *a pag.* 29

7. Supersunt duodecim aliæ Propositiones,

tiones, quæ primæ Parti hujus Libri finem imponunt. Non expono particularia assumpta, quia nimis implexa. Solùm dico ibi tandem manifestæ falsitatis redargui inimicam hypothesim anguli acuti, utpotè quæ duas rectas agnoscere deberet, quæ in uno eodemque puncto commune reciperent in eodem plano perpendiculum: Quod quidem naturæ lineæ rectæ repugnans esse demonstratur per quinque Lemmata, in quibus concluduntur quinque principalia Geometriæ Axiomata, quæ respiciunt lineam rectam, ac circulum, cum suis correlativis Postulatis. *a pag.* 43

8. Secunda pars continet sex Propositiones. Ibi autem; post expensam (juxta hypothesim anguli acuti) naturam illius lineæ, quæ omnibus suis punctis a quadam præsuppositâ rectâ lineâ æquidistet; multis modis ostenditur, eam fore æqualem contrapositæ basi, unde infertur prænunciatæ hypothesis certissima falsitas. Quare tandem in ultima Propos. quæ est XXXIX. exactissimè demonstratur celebre illud Euclidæum Axioma, cui nempe (ut omnes sciunt) universa Geometria innititur. *a pag.* 87

9. Secundus Liber digeri commodè non potuit in Propositiones, etiamsi locis opportunis plura intermista sint utilissima Theoremata, ac Problemata. Meretur nihilominus expressè notari unum quoddam Axioma, cujus ibi demonstratur non modò veritas, verùm etiam universalis utilitas

pro

pro omni Geometria, sine indigentia alterius parum decori Postulati, quod ab interpretibus censeri potest intrusum sub nomine Axiomatis, cujus nempe usus incipit ad 18. quinti. Et id quidem pro primà Parte hujus Libri, in qua vindicatur Def. sexta quinti Euclidæi. *a pag.* 102.

10. Tum in secunda Parte; præter nonnulla alia opportunè addita, ad tuendas reliquas Definitiones ejusdem Quinti circa magnitudines proportionales; demonstratur priore loco (respectu habito ad magnitudines commensurabiles) quinta Definitio Sexti, etiamsi recipi ea deberet in *quid rei*, veluti Axioma: Sed rursum multis exemplis, ex ipso Euclide petitis, ostenditur nullius demonstrationis indigam eam esse, quia Definitionem *puri nominis*. Atque ita, post opportunam additam Appendicem, huic Operi finis imponitur. *a pag.* 132

ERRATA CORRIGE.

Pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE
11.	5.	tespectivè	respectivè
20.	9.	mauifestum	manifestum
26.	9.	*punctum* D	*punctum* B
28.	11.	Jnngantur	Jungantur
28.	14.	pu ctum	punctum
30.	17.	Insistentis	Insistenti
40.	10.	prætet	præter
46.	29.	ratioue	ratione
65.	16.	supposita ri	suppositam
72.	30.	unâ *ABX* rectâ	unâ *ADX* rectâ
73.	1.	intelligantur	intelligatur
73.	5.	cum eâdem rectâ *ABX*	cum eâdem rectâ *ADX*
75.	penult.	sita	sit a
85.	1.	exactissimæ	exactissimè
97.	ult.	Ipsi	ipsi
109.	ult.	*IBC*	*ABC*
136.	16.	habet	se habet

Reliqua errata leviora, ac præsertim circa frequentem immutationem literarum n & u, f & ſ, r & t sapiens Lector condonabit.

EUCLIDIS
AB OMNI NÆVO VINDICATI
LIBER PRIMUS:

In quo demonstratur: duas quaslibet in eodem plano existentes rectas lineas, in quas recta quæpiam incidens duos ad easdem partes internos angulos efficiat duobus rectis minores, ad eas partes aliquando invicem coituras, si in infinitum producantur.

PARS PRIMA

PROPOSITIO I.

SI duæ æquales rectæ (fig. 1.) AC, BD, *æquales ad easdem partes efficiant angulos cum recta* AB: *Dico angulos ad junctam* CD *æquales invicem fore.* Tab. I.

Demonstratur. Jungantur *AD*, *CB*. Tum considerentur triangula *CAB*, *DBA*. Constat (ex quarta primi) æquales fore bases *CB*, *AD*. Deinde considerentur triangula *ACD*, *BDC*. Constat (ex octava primi) æquales fore angulos *ACD*, *BDC*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

MAnente uniformi quadrilatero ABDC, *latera* AB, CD, *bifariam dividantur (fig. 2.) in punctis* M, *&* H. *Di-*

co angulos ad junctam MH *fore hinc inde rectos*.

Demonstratur. Junguntur *AH*, *BH*, atque item *CM*, *DM*. Quoniam in eo quadrilatero anguli *A*, & *B* positi sunt æquales, atque item (ex præcedente) æquales sunt anguli *C*, & *D*; constat ex quarta primi (cum aliàs nota sit æqualitas laterum) æquales fore in triangulis *CAM*, *DBM*, bases *CM*, *DM*; atque item, in triangulis *ACH*, *BDH*, bases *AH*, *BH*. Quare; collatis inter se triangulis *CHM*, *DHM*, ac rursum inter se triangulis *AMH*, *BMH*; constabit (ex octava primi) æquales invicem fore, atque ideo rectos angulos hinc inde ad puncta *M*, & *H*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

SI *duæ æquales rectæ (fig. 3.)* AC, BD, *perpendiculariter insistant cuivis rectæ* AB: *Dico junctam* CD *æqualem fore, aut minorem, aut majorem ipsâ* AB, *prout anguli ad eandem* CD *fuerint aut recti, aut obtusi, aut acuti*.

Demonstratur prima pars. Existente recto utroque angulo *C*, & *D*; sit, si fieri potest, alterutra ipsarum, ut *DC*, major alterâ *BA*. Sumatur in *DC* portio *DK* æqualis ipsi *BA*, jungaturque *AK*. Quoniam igitur super *BD* perpendiculariter insistunt æquales rectæ *BA*, *DK*, æquales erunt (ex prima hujus) anguli *BAK*, *DKA*. Hoc autem absurdum est; cum angulus *BAK* sit ex constructione minor supposito recto *BAC*; & angulus *DKA* sit ex constructione externus, atque ideo (ex decimasexta primi) major interno, & opposito *DCA*, qui supponitur rectus. Non ergo alterutra prædictarum rectarum, *DC*, *BA*, est altera major, dum anguli ad junctam *CD* sint recti; ac propterea æquales invicem sunt. Quod erat primo loco demonstrandum.

Demon-

Demonſtratur ſecunda pars. Si autem obtuſi fuerint anguli ad junctam *CD*, dividantur bifariam *AB*, & *CD*, in punctis *M*, & *H*, jungaturque *MH*. Quoniam ergo ſuper recta *MH* perpendiculariter inſiſtunt (ex præcedente) duæ rectæ *AM*, *CH*, ponitúrque ad junctam *AC* angulus rectus in *A*, non erit (ex prima hujus) recta *CH* æqualis ipſi *AM*, cum deſit angulus rectus in *C*. Sed neque erit major: cæterùm ſumptâ in *HC* portione *KH* æquali ipſi *AM*, æquales forent (ex prima hujus) anguli ad junctam *AK*. Hoc autem abſurdum eſt, ut ſupra. Nam angulus *MAK* eſt minor recto; & angulus *HKA* eſt (ex decimaſexta primi) major obtuſo, qualis ſupponitur internus, & oppoſitus *HCA*. Reſtat igitur, ut *CH*, dum anguli ad junctam *CD* ponantur obtuſi, minor ſit ipſâ *AM*; ac propterea prioris dupla *CD* minor ſit poſterioris duplâ *AB*. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

Demonſtratur tertia pars. Tandem verò, ſi acuti fuerint anguli ad junctam *CD*, ductâ pariformiter (ex præcedente) perpendiculari *MH*, ſic proceditur. Quoniam ſuper recta *MH* perpendiculariter inſiſtunt duæ rectæ *AM*, *CH*, ponitúrque ad junctam *AC* angulus rectus in *A*, non erit (ut ſuprà) recta *CH* æqualis ipſi *AM*, cum deſit angulus rectus in *C*. Sed neque erit minor: cæterùm; ſi in *HC* protractâ ſumatur *HL* æqualis ipſi *AM*; æquales forent (ut ſuprà) anguli ad junctam *AL*. Hoc autem abſurdum eſt. Nam angulus *MAL* eſt ex conſtructione major ſuppoſito recto *MAC*; & angulus *HLA* eſt ex conſtructione internus, & oppoſitus, atque ideo minor (ex decimaſexta primi) externo *HCA*, qui ſupponitur acutus. Reſtat igitur, ut *CH*, dum anguli ad junctam *CD* ſint acuti, major ſit ipſâ *AM*, atque ideo prioris dupla *CD* major ſit poſterioris duplâ *AB*. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

Itaque conſtat junctam *CD* æqualem fore, aut minotem, aut majorem ipsâ *AB*, prout anguli ad eandem *CD* fuerint aut recti, aut obtusi, aut acuti. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

HInc in omni quadrilatero continente tres quidem angulos rectos, & unum obtusum, aut acutum, latera adjacentia illi angulo non recto minora sunt, alterum altero, lateribus contrapositis, si ille angulus sit obtusus, majora autem, si sit acutus. Id enim demonstratum jam est de latere *CH* relatè ad contrapositum latus *AM*; similique modo ostenditur de latere *AC* relatè ad contrapositum latus *MH*. Cum enim rectæ *AC*, *MH*, perpendiculares sint ipsi *AM*, nequeunt (ex prima hujus) esse invicem æquales, propter inæquales angulos ad junctam *CH*. Sed neque (in hypothesi anguli obtusi in *C*) potest quædam *AN*, portio ipsius *AC*, æqualis esse ipsi *MH*, qua nimirum major sit prædicta *AC*: cæterùm (ex eadem prima) æquales forent anguli ad junctam *HN*; quod est absurdum, ut suprà. Rursum verò (in hypothesi anguli acuti in eo puncto *C*) si velis quandam *AX*, sumptam in *AC* protractâ, æqualem ipsi *MH*, qua nimirum minor sit modò dicta *AC*; jam eodem titulo æquales erunt anguli ad *HX*; quod utique absurdum itidem est, ut supra. Restat igitur, ut in hypothesi quidem anguli obtusi in eo puncto *C*, latus *AC* minus sit contraposito latere *MH*; in hypothesi autem anguli acuti sit eodem majus. Quod erat intentum.

COROLLARIUM II.

MUltò autem magis erit *CH* major portione qualibet ipsius *AM*, ut putà *PM*, ad quam nempe juncta

CP acutiorem adhuc angulum efficiat cum ipsa *CH* versùs partes puncti *H*, & obtusum (ex decimasexta primi) cum ea *PM* versùs partes puncti *M*.

COROLLARIUM III.

Rursum constat prædicta omnia æquè procedere, sive assumpta perpendicula *AC*, & *BD*, fuerint certæ cujusdam apud nos longitudinis, sive sint, aut supponantur infinitè parva. Quod quidem notari opportunè debet in reliquis sequentibus Propositionibus.

PROPOSITIO IV.

Vicissim autem (manente figura præcedentis Propositionis) anguli ad junctam CD *erunt aut recti, aut obtusi, aut acuti, prout recta* CD *æqualis fuerit, aut minor, aut major contrapositâ* AB.

Demonstratur. Si enim recta *CD* æqualis sit contrapositæ *AB*, & nihilominus anguli ad eandem sint aut obtusi, aut acuti; jam ipsi tales anguli eam probabunt (ex præcedente) non æqualem, sed minorem, aut majorem contrapositâ *AB*; quod est absurdum contra hypothesim. Idem uniformiter valet circa reliquos casus. Stat igitur angulos ad junctam *CD* esse aut rectos, aut obtusos, aut acutos, prout recta *CD* æqualis fuerit, aut minor, aut major contrapositâ *AB*. Quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES.

Quandoquidem (ex prima hujus) recta jungens extremitates æqualium perpendiculorum eidem rectæ (quam vocabimus basim) insistentium, æquales efficit

ficit angulos cum ipsis perpendiculis; tres idcirco distinguendæ sunt hypotheses circa speciem horum angulorum. Et primam quidem appellabo hypothesim anguli recti; secundam verò, & tertiam appellabo hypothesim anguli obtusi, & hypothesim anguli acuti.

PROPOSITIO V.

Hypothesis anguli recti, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera.

Demonstratur. Efficiat juncta *CD* (fig. 4.) angulos rectos cum duobus quibusvis æqualibus perpendiculis *AC*, *BD*, uni cuivis *AB* insistentibus. Erit *CD* (ex tertia hujus) æqualis ipsi *AB*. Sumantur in *AC*, & *BD* protractis duæ *CR*, *DX*, æquales ipsis *AC*, *BD*; jungaturque *RX*. Facilè ostendemus junctam *RX* æqualem fore ipsi *AB*, & angulos ad eandem rectos. Et primò quidem per superpositionem quadrilateri *ABDC* super quadrilaterum *CDXR*, adhibitâ communi basi *CD*. Deinde elegantiùs sic proceditur. Jungantur *AD*, *RD*. Constat (ex quarta primi) æquales fore in triangulis *ACD*, *RCD*, bases *AD*, *RD*, atque item angulos *CDA*, *CDR*, ac propterea æquales reliquos ad unum rectum, nimirum *ADB*, *RDX*. Quare rursum (ex eadem quarta primi) æqualis erit, in triangulis *ADB*, *RDX*, basis *AB*, basi *RX*. Igitur (ex præcedente) anguli ad junctam *RX* erunt recti, ac propterea persistemus in eadem hypothesi anguli recti.

Quoniam verò augeri similiter potest longitudo perpendiculorum in infinitum, sub eadem basi *AB*, consistente semper hypothesi anguli recti, demonstrandum est eandem hypothesim semper mansuram in casu cujusvis imminutionis eorundem perpendiculorum; quod quidem ita evincitur.

Suman-

Sumantur in AR, & BX duo quælibet æqualia perpendicula AL, BK, jungaturque LK. Si anguli ad junctam LK recti non sint, erunt tamen (ex prima hujus) invicem æquales. Erunt igitur ex una parte, ut putà versùs AB obtusi, & versùs RX acuti, ut nimirum anguli hinc inde ad utrunque illorum punctorum æquales sint (ex decimatertia primi) duobus rectis. Constat autem æqualia etiam invicem esse perpendicula LR, KX, ipsi RX insistentia. Igitur (ex tertia hujus) erit LK major quidem contrapositâ RX, & minor contrapositâ AB.

Hoc autem absurdum est; cum AB, & RX ostensæ sint æquales. Non ergo mutabitur hypothesis anguli recti sub quacunque imminutione perpendiculorum, dum consistat semel posita basis AB.

Sed neque immutabitur hypothesis anguli recti, sub quacunque imminutione, aut majori amplitudine basis; cum manifestum sit considerari posse ut basim quodvis perpendiculum BK, aut BX, atque ideo considerari vicissim ut perpendicula ipsam AB, & rectam æqualem contrapositam KL, aut XR.

Constat igitur hypothesim anguli recti, si vel in uno casu sit vera, semper in omni casu illam solam esse veram. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Hypothesis anguli obtusi, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera.

Demonstratur. Efficiat juncta CD (fig. 5.) angulos obtusos cum duobus quibusvis æqualibus perpendiculis AC, BD, uni cuivis rectæ AB insistentibus. Erit CD (ex tertia hujus) minor ipsâ AB. Sumantur in AC, BD protractis duæ quælibet invicem æquales portiones CR,

DX

DX; jungaturque RX. Jam quæro de angulis ad junctam RX, qui utique (ex prima hujus) æquales invicem erunt. Si obtusi sunt, habemus intentum. At recti non sunt; quia sic unum haberemus casum pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex præcedente) relinqueret locum pro hypothesi anguli obtusi. Sed neque acuti sunt. Nam sic esset RX (ex tertia hujus) major ipsâ AB; ac propterea multò major ipsâ CD. Hoc autem subsistere non posse sic ostenditur. Si quadrilaterum CDXR intelligatur impleri rectis abscindentibus ab ipsis CR, DX, portiones invicem æquales, implicat transiri a recta CD, quæ minor est ipsâ AB, ad RX eâdem majorem, quin transeatur per quandam ST ipsi AB æqualem. Hoc autem absurdum esse in hac hypothesi ex eo constat; quia sic (ex quarta hujus) unus haberetur casus pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex præcedente) relinqueret locum hypothesi anguli obtusi. Igitur anguli ad junctam RX debent esse obtusi.

Deinde, sumptis in AC, BD, æqualibus portionibus AL, BK; simili modo ostendemus angulos ad junctam LK nequire esse acutos versùs ipsam AB; quia sic illa foret major, quàm AB, ac propterea multò major rectâ CD. Hinc autem reperiri deberet, ut suprà, quædam intermedia inter CD minorem, & LK majorem ipsâ AB; intermedia, inquam, æqualis ipsi AB, quæ utique, ex jam notis, omnem locum auferret hypothesi anguli obtusi. Tandem propter hanc ipsam causam recti esse nequeunt anguli ad junctam LK; ergo erunt obtusi. Igitur sub eadem basi AB, auctis, aut imminutis ad libitum perpendiculis, manebit semper hypothesis anguli obtusi.

Sed debet idem demonstrari sub assumpta qualibet basi. Eligatur (fig. 6.) pro basi quodlibet ex prædictis perpendiculis, ut putà BX. Dividantur bifariam in punctis

M,

M, & *H* ipsæ *AB*, *RX*; jungaturque *MH*. Erit *MH* (ex secunda hujus) perpendicularis ipsis *AB*, *RX*. Est autem angulus ad punctum *B* rectus ex hypothesi; & obtusus, ex jam demonstratis, ad punctum *X*. Fiat igitur angulus rectus *BXP* versùs partes ipsius *MH*. Occurret *XP* ipsi *MH* in quodam puncto *P* inter puncta *M*, & *H* constituto; cum ex una parte angulus *BXH* sit obtusus; & ex altera, si jungatur *XM*, angulus *BXM* (ex decimaseptima primi) sit acutus. Tum verò; quoniam quadrilaterum *XBMP* tres continet angulos rectos ex jam notis, & unum obtusum (ex decimasexta primi) in puncto *P*, quia est externus relatè ad internum, & oppositum rectum angulum in puncto *H* trianguli *PHX*; erit latus *XP* (ex Cor. I. post tertiam hujus) minus contraposito *BM*. Quare; assumptâ in *BM* portione *BF* æquali ipsi *XP*; erunt (ex prima hujus) anguli ad junctam *PF* invicem æquales, nimirum obtusi, cum angulus *BFP* (ex decimasexta primi) sit obtusus propter rectum angulum internum, & oppositum *FMP*. Igitur sub qualibet basi *BX* consistit hypothesis anguli obtusi.

Consistet autem, ut suprà, eadem hypothesis sub eadem basi *BX*, quamvis æqualia perpendicula ad libitum augeantur, aut minuantur. Itaque constat hypothesim anguli obtusi, si vel in uno casu sit vera, semper in omni casu illam solam esse veram. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

H*ypothesis anguli acuti, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera.*

Demonstratur facillimè. Si enim hypothesis anguli acuti permittat aliquem casum alterutrius hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, jam (ex duabus præceden-

 tibus)

tibus) nullus relinquetur locus ipsi hypothesi anguli acuti; quod est absurdum. Itaque hypothesis anguli acuti, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

D*Ato quovis triangulo* (*fig*. 7.) ABD, *rectangulo in* B, *protrahatur* DA *usque ad aliquod punctum* X, *& per* A *erigatur ipsi* AB *perpendicularis* HAC, *existente puncto* H *ad partes anguli* XAB. *Dico angulum externum* XAH *æqualem fore, aut minorem, aut majorem interno, & opposito* ADB, *prout vera sit hypothesis anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti: Et vicissim.*

Demonstratur. Sumatur in *HC* portio *AC* æqualis ipsi *BD*, jungaturque *CD*. Erit *CD*, in hypothesi anguli recti, æqualis (ex tertia hujus) ipsi *AB*. Quare angulus *ADB* æqualis erit (ex octava primi) angulo *DAC*, sive ejus æquali (ex decimaquinta primi) angulo *XAH*. Quod erat primo loco demonstrandum.

Tum, in hypothesi anguli obtusi, erit *CD* (ex eadem tertia hujus) minor ipsâ *AB*. Quare in triangulis *ADB*, *DAC* erit (ex vigesimaquinta primi) angulus *DAC*, sive (ipsi ad verticem) *XAH*, minor angulo *ADB*. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Tandem, in hypothesi anguli acuti, erit *CD* (ex eadem tertia hujus) major contrapositâ *AB*. Quare in prædictis triangulis, erit (ex eadem vigesimaquinta primi) angulus *DAC*, sive (ipsi ad verticem) *XAH*, major angulo *ADB*. Quod erat tertio loco demonstrandum.

Vicissim autem: si angulus *CAD*, sive ejus ad verticem *XAH*, æqualis sit interno, & opposito *ADB*; erit (ex quarta primi) juncta *CD* æqualis ipsi *AB*, ac propterea

rea

rea (ex quarta hujus) vera erit hypothesis anguli recti.

Sin verò angulus *CAD*, sive ejus ad verticem *XAH*, minor sit, aut major interno, & opposito *ADB*; erit etiam (ex vigesimaquarta primi) juncta *CD* minor, aut major ipsâ *AB*; ac propterea (ex quarta hujus) vera erit respectivè hypothesis aut anguli obtusi, aut anguli acuti. Quæ omnia erant demonstranda.

PROPOSITIO IX.

Cujusvis trianguli rectanguli reliqui duo acuti anguli simul sumpti æquales sunt uni recto, in hypothesi anguli recti; majores uno recto, in hypothesi anguli obtusi; minores autem in hypothesi anguli acuti.

Demonstratur. Si enim angulus *XAH* (manente figura superioris Propositionis) æqualis est (nimirum, ex præcedente, in hypothesi anguli recti) angulo *ADB*; jam angulus *ADB* duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, prout eos efficit (ex decimatertia primi) prædictus angulus *XAH* cum eodem angulo *HAD*. Quare, dempto recto angulo *HAB*, æquales manebunt uni recto duo simul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat primum.

Tum verò; si angulus *XAH* minor est (nimirum, ex præcedente, in hypothesi anguli obtusi) angulo *ADB*, jam angulus *ADB* plusquam duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, cum quo duos efficit rectos (ex prædicta decimatertia primi) angulus *XAH*. Quare, dempto angulo *HAB*, majores erunt uno recto duo simul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat secundum.

Tandem, si angulus *XAH* major sit (nimirum, ex præcedente, in hypothesi anguli acuti) angulo *ADB*; jam angulus *ADB* minus quàm duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, cum quo duos efficit rectos (ex eadem decima tertia primi) angulus *XAH*. Quare, dempto angulo recto *HAB*, minores erunt uno recto duo simul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat tertium.

PROPOSITIO X.

SI *recta* DB (*fig.* 8.) *perpendiculariter insistat cuidam* ABM, *sitque juncta* DM *major juncta* DA, *etiam basis* BM *major erit basi* BA. *Et vicissim.*

Demonstratur. Et primò quidem non erunt illæ bases invicem æquales. Cæterùm (ex quarta primi) æquales forent, contra hypothesim, ipsæ *AD*, *DM*. Sed neque erit *BA* major quàm *BM*. Cæterùm, sumptâ in *BA* portione *BS* æquali ipsi *BM*, junctâque *SD*, æquales forent (ex eadem quarta primi) anguli *BSD*, *BMD*: Est autem angulus *BSD* (ex decimasexta primi) major angulo *BAD*. Ergo eodem major foret angulus *BMD*. Hoc autem est contra decimamoctavam primi; cum latus *DM* in triangulo *MDA* supponatur majus latere *DA*. Restat igitur, ut basis *BM* major sit basi *BA*. Quod erat primo loco demonstrandum.

Deinde si alterutra basis, ut putà *BA* (ne immutetur figura) fingatur major alterâ *BM*; tunc juncta *DS*, quæ ex *BA* abscindat portionem *SB* æqualem ipsi *BM*, æqualis erit (ex quarta primi) junctæ *DM*. Rursum obtusus erit (ex decimasexta primi) angulus *DSA*, & acutus (ex decimaseptima ejusdem primi) angulus *DAS*. Quare (ex decimaoctava ejusdem) erit juncta *DA* major junctâ *DS*, ejusque suppositâ æquali junctâ *DM*. Quod erat secundo loco demonstrandum. Itaque constant proposita.

PRO-

PROPOSITIO XI.

R*Ecta* AP *(quantælibet longitudinis) secet duas rectas* PL, AD *(fig. 9.) priorem quidem sub recto angulo in* P*, posteriorem verò in* A *sub quovis acuto angulo convergente ad partes ipsius* PL*. Dico rectas* AD, PL *(in hypothesi anguli recti) in aliquo puncto, & quidem ad finitam, seu terminatam distantiam, tandem coituras, si protrahantur versùs illas partes, ad quas cum subjecta* AP *duos angulos efficiunt duobus rectis minores.*

Demonstratur. Protrahatur *DA* versùs alias partes usque ad aliquod punctum X, & per *A* erigatur ipsi *AP* perpendicularis *HAC*, existente puncto *H* ad partes anguli *XAP*. Tum in *AD* protractâ versùs partes ipsius *PL* sumantur duo æqualia intervalla *AP*, *DF*, demittanturque ad subjectam *AP* perpendiculares *DB*, *FM*, quæ utique cadent, propter decimamseptimam primi, ad partes anguli acuti *DAP*; jungaturque *DM*. Ostendere debeo junctam *DM* æqualem fore ipsi *DF*, sive *DA*.

Et primò quidem nequit *DM* major esse ipsâ *DF*. Cæterùm enim angulus *DMF* minor foret (ex decimaoctava primi) angulo *DFM*, sive ejus æquali (ex octava hujus, in hypothesi anguli recti) angulo X *AH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare (cum anguli *CAM*, *FMA* ponantur æquales, utpote recti) reliquus angulus *DMA* major foret reliquo angulo *DAM*. Hoc autem absurdum est (contra decimamoctavam primi) si nempe *DM* ponatur major ipsâ *DF*, sive *DA*.

Sed neque erit *DM* minor ipsâ *DF*. Cæterùm angulus *DMF* major foret (ex eadem decimaoctava primi) angulo *DFM*, sive ejus æquali (ex prædicta octava hujus, in hypothesi anguli recti) angulo X *AH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare rursum, ut suprà, reliquus angulus

DMA

DMA non major, sed minor foret reliquo angulo DAM. Hoc autem absurdum est (contra eandem decimamoctavam primi) si nempe DM ponatur minor ipsâ DF, sive DA.

Restat igitur, ut juncta DM æqualis sit ipsi DF, sive DA. Quare in triangulo DAM æquales erunt (ex quinta primi) anguli ad puncta A, & M; atque ideo in triangulis DBA, DBM, rectangulis in B, æquales erunt (ex vigesimasexta primi) bases AB, BM. Quod quidem hoc loco intendebatur.

Quoniam igitur (assumpto in AD continuatâ intervallo AF duplo intervalli AD) perpendicularis FM ad subjectam AP demissa abscindit ex AP versùs P basim AM duplam illius AB, quam abscindit perpendicularis demissa ex puncto D; manifestum est tot vicibus fieri posse hanc præcedentis intervalli duplicationem, ut sic in ipsa AD continuata deveniatur ad quoddam punctum T, ex quo perpendicularis demissa ad continuatam AP abscindat quandam AR majorem ipsâ quantâlibet finitâ AP. Constat autem evenire id non posse, nisi post occursum ipsius continuatæ AD in quoddam punctum L ipsius PL. Si enim punctum T consisteret ante illum occursum, deberet ipsa perpendicularis TR secare eandem PL in quodam puncto K. Tunc autem in triangulo KPR invenirentur duo anguli recti in punctis P, & R; quod est absurdum contra decimamseptimam primi. Itaque constat rectas AD, PL sibi invicem (in hypothesi anguli recti) in aliquo puncto occursuras (& quidem ad finitam, seu terminatam distantiam) si protrahantur versùs illas partes, ad quas cum subjecta AP (quantælibet finitæ longitudinis) duos angulos efficiunt duobus rectis minores. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Rursum dico rectam AD *alicubi ad eas partes occursuram rectæ* PL *(& quidem ad finitam, seu terminatam distantiam) etiam in hypothesi anguli obtusi.*

Demonstratur. Nam sumptâ, ut in superiore Propositione, *DF* æquali ipsi *AD*, demissisque jam notis perpendicularibus, ostendere debeo junctam *DM* majorem fore ipsâ *DF*, sive *DA*, atque ideo (ex decima hujus) rectam *BM* majorem fore ipsâ *AB*. Et primò non erit *DM* æqualis ipsi *DF*. Cæterùm angulus *DMF* æqualis foret (ex quarta primi) angulo *DFM*, atque ideo major (ex octava hujus in hypothesi anguli obtusi) angulo externo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAF*. Quare (cum anguli *CAM*, *FMA* ponantur æquales utpote recti) reliquus angulus *DMA* minor foret reliquo angulo *DAM*. Quod est absurdum contra quintam primi, si nempe *DM* æqualis sit ipsi *DF*, sive *DA*.

Sed neque ipsa *DM* minor est alterâ *DF*, sive *DA* Cæterùm (ex decimaoctava primi) angulus *DMF* major foret angulo *DFM*, atque ideo (in hac hypothesi anguli obtusi) multò major angulo externo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare rursum, ut suprà, reliquus angulus *DMA* multò minor foret reliquo angulo *DAM*. Hoc autem absurdum est, contra eandem decimamoctavam primi, si nempe *DM* minor sit ipsâ *DF*, sive *DA*.

Restat igitur, ut juncta *DM* major sit ipsâ *DF*, sive *DA*, atque ideo (ex decima hujus) ipsa *BM* major sit alterâ *AB*. Quod erat hoc loco intentum.

Quoniam igitur, assumpto in *AD* continuatâ intervallo *AF* duplo intervalli *AD*, perpendicularis *FM* ad subjectam *AP* demissa plus duplo ex eadem abscindit, quàm abscindatur a perpendiculari demissa ex puncto *D*;

multò

multò citiùs in hac hypothesi anguli obtusi, quàm in superiore hypothesi anguli recti, devenietur ad tantum intervallum, ex quo perpendicularis demissa abscindat basim majorem ipsâ quantâlibet designatâ *AP*. Hoc autem, ut in superiore Propositione, contingere nequit, nisi post occursum continuatæ *AD* in aliquod punctum ipsius *PL*; & quidem ad finitam, seu terminatam distantiam. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIII.

SI *recta* XA (*quantælibet designatæ longitudinis*) *incidens in duas rectas* AD, XL *efficiat cum eisdem ad easdem partes (fig.* II.) *angulos internos* XAD, AXL *minores duobus rectis: dico, illas duas (etiamsi neuter illorum angulorum sit rectus) tandem in aliquo puncto ad partes illorum angulorum invicem coituras, & quidem ad finitam, seu terminatam distantiam, dum consistat alterutra hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi.*

Demonstratur. Nam unus prædictorum angulorum, ut putà *AXL*, erit acutus. Itaque ex apice alterius anguli demittatur ad *XL* perpendicularis *AP*, quæ utique (propter decimamseptimam primi) cadet ad partes anguli acuti *AXL*. Quoniam igitur in triangulo *APX*, rectangulo in *P*, duo simul anguli acuti *PAX*, *PXA*, minores non sunt (ex nona hujus) uno recto, in utraque hypothesi aut anguli recti, aut anguli obtusi; si duo isti anguli auferantur a summa angulorum propositorum jam reliquus angulus *PAD* minor erit recto. Itaque erimus in casu duarum præcedentium Propositionum, dum scilicet alterutra hypothesis consistat aut anguli recti, aut anguli obtusi. Quare (ex eisdem) rectæ *AD*, & PL, sive XL, in aliquo puncto finitæ, seu terminatæ distantiæ ad notas

partes

partes concurrent, tam sub una, quàm sub altera prædictarum hypothesium. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION I.

UBi observare licet notabile discrimen ab hypothesi anguli acuti. Nam in ista demonstrari nequiret generalis hujusmodi rectarum concursus, quoties recta aliqua in duas incidens, duos ad easdem partes efficiat internos angulos duobus rectis minores; nequiret, inquam, directè demonstrari, etiamsi in eadem hypothesi admitteretur prædictus generalis concursus, quoties unus duorum angulorum est rectus. Quamvis enim recta *AD* perpendicularis & ipsa foret rectæ *AP*; quo casu nequiret certè, propter 17. primi, concurrere cum altera perpendiculari *PL*; nihilominus duo simul anguli *DAX*, *PXA*, minores forent duobus rectis, juxta hypothesim prædictam, cum in ea duo simul anguli *PAX*, *PXA* minores sint (ex nona hujus) uno recto. Id autem observasse operæ pretium fuit.

Qualiter verò ex eo solo admisso generali concursu, dum unus angulorum est rectus, & quidem sub assignata quantumlibet parva incidente, destrui possit hypothesis anguli acuti; docebimus post tres sequentes Propositiones.

SCHOLION II.

IN tribus ante jactis theorematis studiosè apposui illam conditionem, quòd recta incidens *AP*, sive *XA*, intelligatur esse *quantælibet designatæ longitudinis*. Si enim, citra omnem rectæ incidentis determinatam mensuram, præcisè agatur de exhibendo, ac demonstrando duarum rectarum concursu in apicem cujusdam trianguli, cujus anguli ad basim sint dati (minores utique duobus rectis) ut putà unus rectus, & alter duobus tantùm gradibus, vel, ut libet, minùs deficiens à recto; quis est tam expers Geometriæ, quin statim rem ipsam demonstrativè exhibeat? Nam supponatur (fig. 11.) datus quilibet angulus *BAP*, ut putà 88. graduum. Si ergo ex quolibet puncto *B* ipsius *AB*, demittatur ad subjectam *AP* (juxta duodecimam primi) perpendicularis *BP*, constat enim verò in eo triangulo *ABP* exhibitum fore demonstrativè concursum optatum in eo puncto *B*.

Tab. II.

Quod si alter angulus ad basim postuletur & ipse minor recto, ut putà 84. graduum, quem nempe exhibeat datus angulus *K*: tunc (juxta 23. primi) efficere poteris versùs partes rectæ *AB* æqualem angulum *APD*, occurrente *PD* ipsi *AB* in quodam ejus intermedio puncto *D*. Quare habebitur rursum demonstrativè concursus optatus in eo puncto *D*.

Tandem vero: si alter angulus postuletur obtusus, sed minor tamen 92. gradibus, ne cum alio dato angulo *BAP* compleantur duo recti: exhibitus hic sit in quodam angulo *R* 91. graduum. Ostendendum est, unum aliquod esse punctum X in ipsa *AP*, ad quod juncta *BX* efficiat angulum *BXA* æqualem dato angulo *R* 91. graduum; adeo ut propterea sub quadam recta incidente *AX* habeatur concursus optatus in prædicto puncto *B*. Sic autem proceditur. Quandoquidem (protractà *PA* usque in aliquod punctum *H*) angulus externus *BAH* & est (propter decimamtertiam primi) 92. graduum, cum angulus interior *BAP* positus sit 88. graduum; ac rursum, propter decimamsextam primi, major est non solùm angulo recto *BPA*, verùm etiam quibusvis eodem titulo obtusis angulis *BXA*, sumpto puncto X ubilibet intra ipsam *PA*, & quidem, propter eandem decimamsextam primi, semper majoribus, dum punctum X assumitur propius puncto *A*: consequens pla-

nè

nè est, ut inter istos angulos, unum 90. graduum in puncto P, & alterum 92. graduum in puncto A, unus reperiatur angulus BXA, qui sit 91. graduum, nimirum æqualis dato angulo R.

Nihilominus, omissa postrema hac observatione circa angulum obtusum, cavere diligentissimè oportet, in eo positam esse difficultatem illius pronunciati Euclidæi, quòd velit occursum duarum rectarum; in illam utique partem, ad quam cum recta incidente duos angulos efficiant duobus rectis minores; atque ita quidem prædictum occursum velit, *quantæcunque longitudinis sit incidens assignata*. Cæterùm enim (ut jam monui in præcedente Scholio) demonstrabo generalem istum occursum ex solo admisso occursu ejusmodi, dum unus angulorum sit rectus; & quidem, etiamsi admisso non pro qualibet assignabili finita incidente, sed solùm admisso intra limites cujusdam assignatæ parvissimæ incidentis.

PROPOSITIO XIV.

Hypothesis anguli obtusi est absolutè falsa, quia se ipsam destruit.

Demonstratur. Ex hypothesi anguli obtusi, assumptâ ut verâ, jam elicuimus veritatem illius Pronunciati Euclidæi; quòd duæ rectæ sibi invicem in aliquo puncto ad eas partes occursuræ sint, ad quas recta quædam, easdem secans, duos qualescunque effecerit internos angulos, duobus rectis minores. Stante autem hoc Pronunciato, cui innititur Euclides post vigesimamoctavam sui Libri primi, manifestum est omnibus Geometris, solam hypothesim anguli recti esse veram, nec ullum relinqui locum hypothesi anguli obtusi. Igitur hypothesis anguli obtusi est absolutè falsa, quia se ipsam destruit. Quod erat demonstrandum.

Aliter, ac magis immediatè. Quandoquidem ex hypothesi anguli obtusi demonstravimus (in nona hujus) duos (fig. 11.) acutos angulos trianguli *APX*, rectanguli in *P*, majores esse uno recto; constat talem assumi posse acutum angulum *PAD*, qui simul cum prædictis duobus acutis angulis duos rectos efficiat. Tunc autem recta *AD* deberet (ex præcedente, juxta hypothesim anguli obtusi) aliquando concurrere cum ipsa *PL*, sive *XL*, respectu habito ad secantem, sive incidentem *AP*; quod est manifestum absurdum contra decimamseptimam primi, si respicias ad secantem, sive incidentem *AX*.

Tab. I.

PROPOSITIO XV.

Tab. II.

E*X quolibet triangulo* ABC, *cujus tres simul anguli (fig. 13.) æquales sint, aut majores, aut minores duobus rectis, stabilitur respectivè hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti.*

Demonstratur. Nam duo saltem illius trianguli anguli, ut putà ad puncta *A*, & *C*, acuti erunt, propter decimamseptimam primi. Quare perpendicularis, ex apice reliqui anguli *B* ad ipsam *AC* demissa, secabit ipsam *AC* (propter eandem decimamseptimam primi) in aliquo puncto intermedio *D*. Si ergo tres anguli ipsius trianguli *ABC* supponantur æquales duobus rectis, constat æquales fore quatuor rectis omnes simul angulos triangulorum *ADB*, *CDB*, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc stante: neutrius modò dictorum triangulorum, ut putà *ADB*, tres simul anguli minores erunt, aut majores duobus rectis; nam sic viceversa alterius trianguli tres simul anguli majores forent, aut minores duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo stabiliretur hypothesis anguli acuti, & ab altero hypothesis anguli obtusi

obtusi; quod repugnat sextæ, & septimæ hujus. Igitur tres simul anguli utriusque prædictorum triangulorum æquales erunt duobus rectis; ac propterea (ex nona hujus) stabilietur hypothesis anguli recti. Quod erat primo loco demonstrandum.

Sin autem tres anguli propositi trianguli *ABC* ponantur majores duobus rectis; jam duorum triangulorum *ADB*, *CDB* omnes simul anguli majores erunt quatuor rectis, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc stante: neutrius modò dictorum triangulorum tres simul anguli æquales præcisè erunt, aut minores duobus rectis; nam sic viceversâ alterius trianguli tres simul anguli majores forent duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo stabiliretur hypothesis aut anguli recti, aut anguli acuti, & ab altero hypothesis anguli obtusi, quod repugnat quintæ, sextæ, & septimæ hujus. Igitur tres simul anguli utriusque prædictorum triangulorum majores erunt duobus rectis; ac propterea (ex nona hujus) stabilietur hypothesis anguli obtusi. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Tandem verò. Si tres anguli propositi trianguli *ABC* ponantur minores duobus rectis, jam duorum triangulorum *ADB*, *CDB*, omnes simul anguli minores erunt quatuor rectis, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc stante: neutrius modò dictorum triangulorum tres simul anguli æquales erunt, aut majores duobus rectis; nam sic viceversâ alterius rrianguli tres simul anguli minores forent duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo stabiliretur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, & ab altero hypothesis anguli acuti; quod repugnat quintæ, sextæ, & septimæ hujus. Igitur tres simul anguli utriusque prædictorum triangulorum minores erunt duobus rectis; ac propterea (ex

nona

nona hujus) ſtabilietur hypotheſis anguli acuti. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

Itaque ex quolibet triangulo *ABC*, cujus tres ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores duobus rectis, ſtabilitur reſpectivè hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti. Quod erat propoſitum.

COROLLARIUM.

Hinc; protracto uno quolibet cujuſvis propoſiti trianguli latere, ut putà *AB* in *H*; erit (ex 13. primi) externus angulus *HBC* aut æqualis, aut minor, aut major reliquis ſimul internis, & oppoſitis angulis ad puncta *A*, & *C*, prout vera fuerit hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti. Et viciſſim.

PROPOSITIO XVI.

Ex *quolibet quadrilatero* ABCD, *cujus quatuor ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores quatuor rectis, ſtabilitur reſpectivè hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti.*

Demonſtratur. Jungatur *AC*. Non erunt (fig. 14.) tres ſimul anguli trianguli *ABC* æquales, aut majores, aut minores duobus rectis, quin tres ſimul anguli trianguli *ADC* ſint ipſi etiam reſpectivè æquales, aut majores, aut minores duobus rectis; ne ſcilicet (ex præcedente) ab uno illorum triangulorum ſtabiliatur una hypotheſis, & ab altero altera, contra quintam, ſextam, & ſeptimam hujus. Hoc ſtante: Si quatuor ſimul anguli propoſiti quadrilateri æquales ſint quatuor rectis, conſtat utriuſque modò dictorum triangulorum tres ſimul angulos æquales fore duobus rectis, atque ideo (ex præcedente) ſtabili-

tum

tum iri hypothesim anguli recti.

Sin verò ejusdem quadrilateri quatuor simul anguli majores sint, aut minores quatuor rectis, debebunt similiter illorum triangulorum tres simul anguli respectivè esse aut unà majores, aut unà minores duobus rectis. Quare ab illis triangulis stabilietur respectivè (ex præcedente) aut hypothesis anguli obtusi, aut hypothesis anguli acuti.

Itaque ex quolibet quadrilatero, cujus quatuor simul anguli æquales sint, aut majores, aut minores quatuor rectis, stabilitur respectivè hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

HInc: protractis versùs easdem partes duobus quibusvis propositi quadrilateri contrapositis lateribus, ut putà *AD* in *H*, & *BC* in *M*; erunt (ex 13. primi) duo simul externi anguli *HDC*, *MCD* aut æquales, aut minores, aut majores duobus simul internis, & oppositis angulis ad puncta *A*, & *B*, prout vera fuerit hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti.

PROPOSITIO XVII.

SI uni, ut libet, cuidam parvæ rectæ AB *insistat (fig. 15.) ad rectos angulos recta* AH: *Dico subsistere non posse in hypothesi anguli acuti, ut quævis* BD, *efficiens cum* AB *quemlibet angulum acutum versùs partes ipsius* AH, *occursura tandem sit ad finitam, seu terminatam distantiam ipsi* AH *productæ.*

Demonstratur. Jungatur *HB*. Erit (ex 17. primi) acutus angulus *ABH*, propter angulum rectum ad punctum *A*. Jam (ex 23. primi) ducatur quædam *HD* versùs

sùs partes puncti *B*, quæ non secans angulum *AHB* efficiat cum ipsa *HB* angulum acutum æqualem ipsi acuto *ABH*. Deinde ex puncto *B* demittatur ad *HD* perpendicularis *BD*, quæ cadet ad partes prædicti anguli acuti ad punctum *H*. Quoniam igitur latus *HB* opponitur in triangulo *HDB* angulo recto in *D*, atque item in triangulo *BAH* angulo recto in *A*; ac rursum in duobus illis triangulis adjacent eidem lateri *HB* æquales anguli, qui sunt in priore quidem triangulo angulus *BHD*, & in posteriore angulus *HBA*; erit etiam (ex 26. primi) reliquus angulus *HBD* in priore triangulo æqualis reliquo angulo *BHA* in posteriore triangulo. Quare integer angulus *DBA* æqualis erit integro angulo *AHD*.

Jam verò: non erit uterque prædictorum æqualium angulorum obtusus, ne incidamus (ex præcedente) in unum casum jam reprobatæ hypothesis anguli obtusi. Sed neque erit rectus, ne incidamus (ex eadem præcedente) in unum casum pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex 5. hujus) relinqueret locum hypothesi anguli acuti. Uterque igitur illorum angulorum erit acutus. Hoc stante: Quòd recta *BD* protracta occurrere nequeat in quodam puncto *K* ipsi *AH* ad easdem partes productæ, ex eo demonstratur; quia in triangulo *KDH*, præter angulum rectum in *D*, adesset angulus obtusus in *H*, cum angulus *AHD*, in prædicta hypothesi anguli acuti, demonstratus sit acutus. Hoc autem absurdum est, contra 17. primi. Non ergo subsistere potest in ea hypothesi, ut quævis *BD*, efficiens cum una, ut libet parva recta *AB*, quemlibet angulum acutum versùs partes ipsius *AH*, occursura tandem sit ad finitam, seu terminatam distantiam, ipsi *AH* productæ. Quod erat demonstrandum.

Aliter idem, ac faciliùs. Insistant uni cuidam quantumlibet parvæ rectæ *AB* (fig. 16.) duæ perpendiculares

AK,

AK, *BM*. Demittatur ad *AK* ex aliquo puncto *M* ipsius *BM* perpendicularis *MH*, jungaturque *BH*. Constat acutum fore angulum *BHM*. Est etiam (ex præcedeute) acutus angulus *BMH*, in hypothesi anguli acuti. Ergo perpendicularis *BDX*, ex puncto *B* ad ipsam *HM* demissa, secabit (ex 17. primi) eam *HM* in quodam puncto intermedio *D*. Ergo angulus *XBA* erit acutus. Constat autem (ex eadem 17. primi) non posse invicem concurrere (saltem ad finitam, seu terminatam distantiam) duas illas utcunque productas *AHK*, *BDX*, propter angulos rectos in punctis *H*, & *D*. Itaque nequit subsistere in hypothesi anguli acuti, ut quævis *BD*, efficiens cum una, ut libet, parva recta *AB* quemlibet angulum acutum versùs partes ipsius *AH*, eidem *AB* perpendicularis, occursura tandem sit (ad finitam, seu terminatam distantiam) ipsi *AH* productæ. Quod erat propositum.

SCHOLION I.

Atque id est, quod spopondi in Scholiis post XIII. hujus, nimirum destructum iri hypothesim anguli acuti (quæ sola obesse jam potest generali illi Pronunciato Euclidæo) ex solo admisso generali duarum rectarum concursu ad eas partes, versùs quas recta quæpiam, quantumlibet parva, in easdem incidens, duos efficiat internos angulos minores duobus rectis; atque ita quidem, etiamsi alteruter illorum angulorum supponi debeat rectus.

SCHOLION II.

Sed rursum meliore loco, post XXV. hujus, ostendam destructum pariter iri hypothesim anguli acuti, dum unus aliquis tenuissimus, ut libet, angulus acutus designari possit; sub quo, si recta quæpiam in alteram incidat, debeat hæc producta (ad finitam, seu terminatam distantiam) aliquando occurrere cuivis ad quantamlibet finitam distantiam excitatæ super ea incidente perpendiculari.

PROPOSITIO XVIII.

EX *quolibet triangulo* ABC*, cujus angulus* (*fig.* 17.) *ad punctum* D *in uno quovis semicirculo existat, cujus diameter* AC*, stabilitur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, prout nempe angulus ad punctum* B *fuerit aut rectus, aut obtusus, aut acutus.*

Demonstratur. Ex centro *D* jungatur *DB*. Erunt (ex quinta primi) æquales anguli ad basim *AB*, atque item ad basim *BC*, in triangulis *ADB*, *CDB*. Quare, in triangulo *ABC*, duo simul anguli ad basim *AC* æquales erunt toti angulo *ABC*. Igitur tres simul anguli trianguli *ABC* æquales erunt, aut majores, aut minores duobus rectis, prout angulus ad punctum *B* fuerit aut rectus, aut obtusus, aut acutus. Itaque ex quolibet triangulo *ABC*, cujus angulus ad punctum *B* in uno quovis semicirculo existat, cujus diameter *AC*, stabilitur (ex 15. hujus) hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, prout nempe angulus ad punctum *B* fuerit aut rectus, aut obtusus, aut acutus. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIX.

ESto *quodvis triangulum* AHD (*fig.* 18.) *rectangulum in* H. *Tum in* AD *continuatâ sumatur portio* DC *æqualis ipsi* AD*; demittaturque ad* AH *productam perpendicularis* CB. *Dico stabilitum hinc iri hypothesim aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, prout portio* HB *æqualis fuerit,*

rit, aut major, aut minor ipsâ AH.

Demonstratur. Nam juncta *DB* erit (ex 4. primi, & ex 10. hujus) aut æqualis, aut major, aut minor ipsâ *AD*, sive *DC*, pro ut illa portio *HB* æqualis fuerit, aut major, aut minor ipsâ *AH*.

Et primò quidem sit *HB* æqualis ipsi *AH*, ita ut propterea juncta *DB* æqualis sit ipsi *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DB* describatur, transituram per puncta *A*, & *C*. Igitur angulus *ABC*, qui ponitur rectus, existet in eo semicirculo, cujus diameter *AC*. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli recti. Quod erat primo loco demonstrandum.

Sit secundò *HB* major ipsâ *AH*, ita ut propterea juncta *DB* major sit ipsâ *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DA*, sive *DC*, describatur, occursuram ipsi *DB* in aliquo puncto intermedio *K*. Igitur, junctis *AK*, & *CK*, erit angulus *AKC* obtusus, quia major (ex 21. primi) angulo *ABC*, qui ponitur rectus. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli obtusi. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Sit tertiò *HB* minor ipsâ *AH*, ita ut propterea juncta *DB* minor sit ipsâ *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DA*, sive *DC* describatur, occursuram in aliquo puncto *M* ipsius *DB* ulteriùs protractæ. Igitur junctis *AM*, & *CM*, erit angulus *AMC* acutus, quia minor (ex eadem 21. primi) illo angulo *ABC*, qui ponitur rectus. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli acuti. Quod erat tertio loco demonstrandum. Itaque constant omnia proposita.

PROPOSITIO XX.

E*Sto triangulum* ACM (*fig.* 19.) *rectangulum in* C. *Tum ex puncto* B *dividente bifariam ipsam* AM *demittatur ad* AC *perpendicularis* BD. *Dico hanc perpendicularem majorem non fore (in hypothesi anguli acuti) medietate perpendicularis* MC.

Demonstratur. Continuetur enim *DB* usque ad *DH* duplam ipsius *DB*. Foret igitur *DH* (si *DB* major sit prædicta medietate) major ipsâ *CM*, ac propterea æqualis cuidam continuatæ *CMK*. Jungantur *AH*, *HK*, *HM*, *MD*. Jam sic progredimur. Quoniam in triangulis *HBA*, *DBM*, æqualia ponuntur latera *HB*, *BA*, lateribus *DB*, *BM*; suntque (ex 15. primi) æquales anguli ad punctum *B*; erit etiam (ex quarta ejusdem primi) basis *HA* æqualis basi *MD*. Deinde, propter eandem rationem, æquales erunt in triangulis *HBM*, *DBA*, bases *HM*, *DA*. Quare in triangulis *MHA*, *ADM*, æquales erunt (ex 8. primi) anguli *MHA*, *ADM*. Rursum in triangulis *AHB*, *MDB*, æqualis manebit angulus residuus *MHB* residuo recto angulo *ADB*. Igitur rectus erit angulus *MHB*. At hoc absurdum est, in hypothesi anguli acuti; cum recta *KH* jungens æqualia perpendicula *KC*, *HD*, acutos angulos efficiat (ex tertia hujus) cum eisdem perpendiculis. Non ergo perpendicularis *BD* major est (in hypothesi anguli acuti) medietate perpendicularis *MC*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

I*Isdem manentibus: Intelligantur in infinitum produci ipsæ* AM, & AC. *Dico earundem distantiam majorem fore (in utraque hypothesi aut anguli recti, aut anguli acuti) quolibet assignabili finita longitudine.*

Demon-

Demonstratur. In AM continuatâ sumatur AP dupla ipsius AM, demittaturque ad AC continuatam perpendicularis PN. Non erit (ex præcedente) in utrâvis prædictâ hypothesi perpendicularis MC major medietate perpendicularis PN. Igitur PN saltem erit dupla ipsius MC, prout MC saltem est dupla alterius BD. Atque ita semper, si in continuata AM sumatur dupla ipsius AP, ex ejusque termino demittatur perpendicularis ad continuatam AC. Scilicet perpendicularis, quæ ex AM semper magis continuatâ demittetur ad continuatam AC, multiplex erit determinatæ BD supra quemlibet finitum assignabilem numerum. Igitur prædictarum rectarum distantia major erit (in utraque prædicta hypothesi) qualibet assignabili finita longitudine. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam verò hypothesis anguli obtusi, quæ unicè obesse hìc posset, demonstrata jam est absolutè falsa; consequitur sanè absolutè verum esse, quod distantia unius ab altera prædictarum rectarum, si in infinitum producantur, major sit qualibet finita assignabili longitudine.

SCHOLION I.

In quo expenditur conatus Procli.

Post Theoremata a me huc usque demonstrata sine ulla dependentia ab illo Pronunciato Euclidæo, ad cujus nempe exactissimam demonstrationem omnia conspirant; operæ pretium facturum me judico, si quorundam etiam celebriorum Geometrarum labores in eandem me-

tam

tam contendentium diligenter expendam. Incipio a Proclo, cujus eſt apud Clavium in Elementis poſt XXVIII. Libri primi ſequens aſſumptum: *Si ab uno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedet*. At Proclus demonſtrat quidem (ut ibi optimè advertit Clavius) duas rectas (fig. 20.) ut putà *AH*, *AD* ab eodem puncto *A* exeuntes versùs eaſdem partes, ſemper magis, in majore diſtantia ab eo puncto *A*, inter ſe diſtare, ſed non etiam itaut ea diſtantia creſcat ultra omnem finitum deſignabilem limitem, prout opus foret ad ipſius intentum. Quo loco præfatus Clavius affert exemplum Conchoidis Nicomedeæ, quæ cum recta *AH* ex eodem puncto *A* versùs eaſdem partes exiens, ita ſemper magis ab eadem recedit, ut tamen ipſarum diſtantia non niſi ad infinitam earundem productionem, æqualis ſit cuidam finitæ rectæ *AB* perpendiculariter inſiſtentis ipſis *AH*, *BC*, versùs eaſdem partes in infinitum protractis. Quid ni ergo, niſi ſpecialis ratio in contrarium cogat, dici idem poſſit de duabus ſuppoſitis rectis lineis *AH*, *AD*?

Neque hìc accuſari poteſt Clavius, quòd Proclo opponat eam Conchoidis proprietatem, quæ nempe demonſtrari non poteſt ſine adjumento plurium Theorematum, Pronunciato hìc controverſo innixorum. Nam dico ex hoc ipſo confirmari vim redargutionis Clavianæ; quia ſcilicet ex illo Pronunciato aſſumpto ut vero manifeſtè conſequitur, duas lineas in infinitum protractas, unam rectam, & alteram inflexam, poſſe unam ab altera ſemper magis recedere intra quendam finitum determinatum limitem; unde utique oriri poteſt ſuſpicio, ne ſimile quidpiam contingere poſſit in duabus lineis rectis, niſi aliter demonſtretur.

Sed non idcirco; poſtquam ego in Cor. præcedentis

Pro-

Propositionis manifestam jam feci absolutam veritatem præcitati assumpti; transiri statim potest ad asserendum Pronunciatum illud Euclidæum. Nam antea demonstrari etiam oporteret, quòd duæ illæ rectæ *AH*, *BC*, quæ cum incidente *AB* duos ad easdem partes angulos efficiant duobus rectis æquales, ut putà utrunque rectum, non etiam ipsæ, ad eas partes in infinitum protractæ, semper magis invicem dissiliant ultra omnem finitam assignabilem distantiam. Quatenus enim partem affirmativam præsumere quis velit; quæ utique verissima est in hypothesi anguli acuti; non erit sanè legitimum consequens, quòd recta *AD* quomodolibet secans angulum *HAB*; unde nempe minores fiant duobus rectis duo simul ad easdem partes interni anguli *DAB*, *CBA*; quòd, inquam, ea recta *AD*, in infinitum producta coire tandem debeat cum producta *BC*; etiamsi aliàs demonstratum sit, quòd distantia duarum *AH*, *AD* in infinitum productarum major semper evadat ultra omnem finitum designabilem limitem.

Quòd autem præfatus Clavius satis esse judicaverit veritatem illius assumpti ad demonstrandum Pronunciatum hìc controversum; condonari id debet præconceptæ ab ipso Clavio opinioni circa rectas lineas æquidistantes, de quibus in sequente Scholio commodiùs agemus.

SCHOLION II.

In quo expenditur idea Clarissimi Viri Joannis Alphonsi Borellii in suo Euclide Restituto.

ACcusat doctissimus hic Auctor Euclidem, quòd rectas lineas parallelas eas esse definiverit, *quæ in eodem plano existentes non concurrunt ad utrasque partes, licèt in infinitum producantur*. Rationem accusationis affert, quòd talis

passio

paſſio ignota ſit: *tum quia*, inquit, *ignoramus, an tales lineæ infinitæ non concurrentes reperiri poſſint in natura: tum etiam quia infiniti proprietates percipere non poſſumus, & proinde non eſt evidenter cognita paſſio ejuſmodi*.

Sed pace tanti Viri dictum ſit: Numquid reprehendi poteſt Euclides, quòd *quadratum* (ut unum inter innumera exemplum proferam) definiverit eſſe *figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam*; cum dubitari poſſit, an figura ejuſmodi locum habeat in natura? Repræhendi, inquam, æquiſſimè poſſet; ſi, ante omnem Problematicam demonſtrativam conſtructionem, figuram prædictam aſſumpſiſſet tanquam datam. Hujus autem vitii immunem eſſe Euclidem ex eo manifeſtè liquet, quòd nuſquam præſumit quadratum a ſe definitum, niſi poſt Prop. 46. Libri primi, in qua problematicè docet, ac demonſtrat *quadrati prout ab ipſo definiti, a data recta linea deſcriptionem*. Simili igitur modo reprehendi nequit Euclides, quòd rectas lineas parallelas eo tali modo definiverit, cum eas nuſquam ad conſtructionem ullius Problematis aſſumat tanquam datas, niſi poſt Prop. 31. lib. primi, in qua Problematicè demonſtrat, quo pacto *a dato extra datam rectam lineam puncto duci debeat recta linea eidem parallela*, & quidem juxta definitionem ab eo traditam parallelarum, *ita ut nempe in infinitum protractæ in neutram partem ſibi invicem occurrant*: Quodque amplius eſt; id ipſum demonſtrat ſine ulla dependentia a Pronunciato hic controverſo. Itaque Euclides ſine ulla petitione principii demonſtrat *reperiri poſſe in natura duas tales lineas rectas, quæ* (in eodem plano conſiſtentes) *in utramque partem in infinitum protractæ nunquam concurrant*; ac propterea *cognitam nobis evidenter facit eam paſſionem*, per quam rectas lineas parallelas definit.

Pergamus porrò, quò nos invitat diligens Euclidis accuſator. Parallelas rectas lineas appellat duas quaslibet rectas *AC*, *BD*, quæ perpendiculariter ad easdem partes (fig. apud me 21.) insistant uni cuidam rectæ *AB*. Nihil moror, quin definitio ejusmodi exposita sit *per passionem* (ut ipse ait) possibilem, & evidentissimam; cum (ex undecima primi) a quolibet in data recta puncto excitari possit perpendicularis.

Verùm hanc ipsam & possibilitatem, & evidentiam jam demonstravi circa definitionem traditam ab Euclide. Quare unicè restat, ut conferatur notum illud Pronunciatum Euclidæum cum altero itidem Pronunciato, quod usui esse debeat ad ulteriorem progressum post novam istam parallelarum definitionem. Ecce autem alterum istud Pronunciatum apud Clavium (ad quem disertè provocat ipse Borellius) in Scholio post Prop. 28. lib. primi: Si recta linea, ut putà *BD* super aliam rectam, ut putà *BA*, in transversum moveatur constituens cum ea in suo extremo *B* angulos semper rectos, describet alterum illius extremum *D* lineam quoque rectam *DC*, dum nempe ipsa *BD* pervenerit ad congruendum alteri æquali *AC*.

Agnosco opportunitatem Pronunciati, ut inde transitus fiat ad demonstrandum illud alterum Euclidæum, quo nempe fulciri tandem debet reliqua omnis Geometria. Nam antea proposuerat Clavius; quòd linea, cujus omnia puncta æquè distent a quadam supposita recta *AB*; qualis utique est (ex hypothesi prædictæ descriptionis) linea *DC*; debet esse etiam ipsa linea recta; quia nempe ejusmodi erit, ut omnia ipsius puncta intermedia *ex æquo jaceant* (qualis est rectæ lineæ definitio) inter ejus extrema puncta *D*, & *C*; *ex æquo*, inquam, *jaceant*; cum omnia æquè distent ab ea supposita recta *AB*, nimirum quanta est longitudo ipsius *BD*, aut *AC*. Quo loco affert Clavius exemplum lineæ circularis, de qua commodiùs infra disseremus; ubi ostendam clarissimam hac in parte disparitatem inter lineam rectam, & circularem. Nam interim dico non satis liquere, an linea descripta ab eo puncto *D* sit potiùs recta *DC*, quàm curva quædam *DGC* seu convexa, seu concava versùs partes ipsius *BA*.

Si enim ex puncto *F* dividente bifariam ipsam *BA* intelligatur educta perpendicularis, quæ occurrat rectæ *DC* in *E*, & prædictis curvis in *G*, & *G*, constat sanè (ex 2. hujus) rectos fore angulos hinc inde ad punctum *E*; qualiscunque tandem in eo motu intelligatur descripta linea *DC* a puncto *D*; ac præterea (ex facili intellecta superpositione) æquales hinc inde fore angulos ad puncta *G*, prout alterutra curva *DGC* descripta fuerit.

Sed rursum; assumpto in *AB* quolibet puncto *M*; si educatur perpendicularis, quæ occurrat rectæ *DC* in *N*, & prædictis curvis in *H*, & *H*, paulò post demonstrabo rectos fore angulos hinc inde ad punctum *N*, quatenus quidem recta ipsa *DC* genita supponatur in suo illo motu a puncto *D*, seu quatenus recta *MN* æqualis censeatur ipsi *BD*. Sin verò alterutra curva *DHC* genita putetur; ex facili itidem præscripta superpositione demonstrabitur æquales rursum hinc inde fore angulos *MHD*, *MHC*, ubivis in ea alterutra descripta curva sumptum fuerit punctum *H*, ex quo ad subjectam rectam lineam *AB* demissa intelligatur perpendicularis *HM*. Verùm hac de re fusiùs, ac diligentiùs in altera parte hujus libri, ubi locum proprium habet.

Quorsum igitur, inquies, præcox ista anticipatio? In eum, inquam, finem; ut ne ex ista lineæ eo modo genitæ verissima, & a me exactissimè in præcitato loco demonstranda proprietate; & quidem citra omnem defectum quomodolibet infinitè parvum; præcipitanter censeremus non nisi rectam lineam esse posse. Scilicet hic inquiritur penitior rectæ lineæ natura, sine qua vix infantiam prætergrestergressa Geometria subsistere ibi deberet. Non igitur hac in re vituperari potest major quædam exactissimæ veritatis inquisitio.

Neque tamen hìc renuo, quin diligentissimâ aliquâ experientiâ physicâ deprehendi possit, quòd linea *DC* eo motu genita non nisi recta linea censenda sit. Sed quatenus ad experientiam physicam provocare hìc liceat; tres statim afferam demonstrationes Physico-Geometricas ad comprobandum Pronunciatum Euclidæum. Ubi non loquor de experientia physica tendente in infinitum, ac propterea nobis impossibili; qualis nempe requireretur ad cognoscendum, quòd puncta omnia junctæ rectæ *DC* æquidistent a recta *AB*, quæ supponitur in eodem cum ipsa *DC* plano consistens. Nam mihi satis erit unicus individuus casus; ut putà, si junctâ rectâ *DC*, assumptoque uno aliquo ejus puncto *N*, perpendicularis *NM* demissa ad subjectam *AB* comperiatur esse æqualis ipsi *BD*, sive *AC*. Tunc enim anguli hinc inde ad punctum *N* æquales forent (ex 1. hujus) angulis sibi correspondentibus ad puncta *C*, & *D*, qui rursum (ex eadem 1. hujus) æquales inter se forent. Quare anguli hinc inde ad punctum *N*, atque ideo etiam reliqui duo recti erunt. Igitur unum habebimus casum pro hypothesi anguli recti; ac propterea (juxta quintam, & decimamtertiam hujus) demonstratum habebimus Pronunciatum Euclidæum. Atque hæc esse potest prima demonstratio Physico-Geometrica.

Transeo ad secundam. Esto semicirculus, cujus centrum *D*, & diameter *AC*. Si ergo (fig. 17.) in ejus circumferentia assumatur punctum aliquod *B*, ad quod junctæ *AB*, *CB* comperiantur continere angulum rectum, satis erit hic unicus casus (prout demonstravi in 18. hujus) ad stabiliendam hypothesim anguli recti, ac propterea (ex prædicta 13. hujus) ad demonstrandum notum illud Pronunciatum.

Supereſt tertia demonſtratio Phyſico-Geometrica; quam puto omnium efficaciſſimam, ac ſimpliciſſimam, utpote quæ ſubeſt communi, facillimæ, paratiſſimæque experientiæ. Si enim in circulo, cujus centrum *D*, tres coaptentur (fig. 22.) rectæ lineæ *CB*, *BL*, *LA*, æquales ſingulæ radio *DC*, comperiaturque juncta *AC* tranſire per centrum *D*, ſatis id erit ad demonſtrandum intentum. Nam junctis *DB*, *DL*, tria habebimus triangula, quæ (ex 8. & 5. primi) tum inter ſe invicem, tum etiam in ſe ipſis ſingula erunt æquiangula. Quoniam igitur tres ſimul anguli ad punctum *D*, nimirum *ADL*, *LDB*, *BDC* æquales ſunt (ex 13. primi) duobus rectis; duobus etiam rectis æquales erunt tres ſimul anguli cujuſvis illorum triangulorum, ut putà trianguli *BDC*. Quare (ex 15. hujus) ſtabilita hinc erit hypotheſis anguli recti; ac propterea (ex jam nota 13. hujus) demonſtratum manebit illud Pronunciatum.

Sin verò, ante omnem attentatam ſeu demonſtrationem, ſeu figuralem exhibitionem, conferre inter ſe placeat duo illa Pronunciata, fateor ſanè Euclidæum videri poſſe obſcurius, aut etiam falſitati obnoxium. At poſt figuralem exhibitionem, quam Scholio IV. conſequenti reſervo, conſtabit viceversâ Pronunciatum quidem Euclidæum retinere poſſe dignitatem, ac nomen Pronunciati, alterum verò inter Theoremata computari tutiùs debere.

Sed hìc explicare debeo (prout paulò ante me facturum ſpopondi) manifeſtam iſto in genere diſparitatem inter lineam circularem, & lineam rectam. Diſparitas autem ex eo oritur; quòd recta quidem linea dicitur ad ſe ipſam; circularis verò, ut putà (fig. 23.) *MDHNM*, non ad ſe ipſam, ſed ad alterum dicitur, nimirum ad quoddam alterum in eodem cum ipſa plano exiſtens punctum *A*, quod eſt ejuſdem centrum. Conſequens igitur eſt, prout optime me demonstratur a Clavio, quòd linea *FBCL* in eodem cum illa plano consistens, & cujus omnia puncta æquidistent a prædicta *MDHNM*, sit & ipsa circularis, nimirum omnibus suis punctis æquidistans a communi centro *A*! Quod enim *BD*, quæ sit continuatio in rectum ipsius *AB*, sit mensura distantiæ illius puncti *B* ab ea circulari *MDHNM*, ex eo constat; quia (ex 7. tertii, quæ est independens a Pronunciato hìc controverso) minima omnium ipsa est, quæ ab eo puncto in eam circumferentiam cadere possint. Idem valet de reliquis *CH*, *LN*, *FM*. Quoniam igitur & totæ *AM*, *AD*, *AH* æquales sunt, utpote radii ex centro *A* ad suppositam lineam circularem *MDHNM*; atque item æquales sunt abscissæ *FM*, *BD*, *CH*, *LN*, quæ nempe mensura sunt æqualis distantiæ omnium punctorum illius lineæ *FBCLF* ab ea supposita linea circulari *MDHNM*; consequens planè est, ut æquales pariter sint residuæ *AF*, *AB*, *AC*, *AL*, ac propterea ipsa etiam linea *FBCLF* sub eodem centro *A* circularis sit.

Numquid autem uniformiter, ad demonstrandum, quòd linea *DC* (fig. 21.) eo tali motu genita a puncto *D* sit linea recta, satis erit æquidistantia omnium ipsius punctorum a subjecta recta *AB*? Nullo modo. Nam linea recta dicitur absolutè ad se ipsam, sive in se ipsa, nimirum ita *ex æquo jacens inter sua puncta*, ac præsertim extrema, ut manentibus istis immotis nequeat ipsa revolvi ad occupandum novum locum. Nisi hæc passio aliquo pacto demonstretur de ea *DC*, nunquam constabit eam esse lineam rectam, qualiscunque tandem supponatur, aut demonstretur omnium ipsius punctorum relatio ad subjectam in eodem plano rectam *AB*; præsertim verò, ne uniformiter dicamus nullam aliam in eo plano fore lineam rectam, quæ omnibus suis punctis non æquidistet ab ea supposita recta linea *AB*.

Neque

Neque tamen dictum hoc meum ita accipi volo, quasi putem demonstrari non posse, quòd linea sic genita ipsa sit linea recta, nisi post demonstratam veritatem controversi Pronunciati; cum magis ego ipse prope finem hujus Libri demonstraturus id sim, ad confirmandum ipsum tale Pronunciatum.

SCHOLION III.

In quo expenditur conatus Nassaradini Arabis, & simul idea super eodem negotio Clariss. Viri Joannis Vallisii.

COnatum istum Nassaradini Arabis latino idiomate typis vulgavit prælaudatus Vir Joannes Vallisius, cum animadversionibus opportuno loco adjectis. Duo autem in rem suam postulat sibi concedi Nassaradinus.

Primum est; ut duæ quælibet rectæ lineæ in eodem plano positæ, in quas aliæ quotlibet rectæ lineæ ita incidant, ut uni quidem earum perpendiculares semper sint, alteram verò ad angulos inæquales semper secent, nimirum versùs unam partium sub angulo semper acuto, & versùs alteram sub angulo semper obtuso; ut, inquam, priore loco dictæ lineæ censeantur semper magis (quandiu se mutuò non secent) ad se invicem accedere versùs partes illorum angulorum acutorum; & vicissim semper magis a se invicem recedere versùs partes angulorum obtusorum.

At ego quidem, si nihil aliud moratur Nassaradinum, libens permitto, quod postulat; cum istud ipsum, quod ab eo indemonstratum relinquitur, intelligi possit exactissimè a me demonstratum in Cor. II. post 3. hujus.

Alterum Nassaradini Postulatum est reciprocum primi; ut nempe acutus semper sit angulus versùs eas partes,

ad

ad quas jam dictæ perpendiculares ſupponantur fieri ſemper breviores; obtuſus autem versùs alias partes, ad quas eædem perpendiculares ſupponantur evadere ſemper longiores.

Verùm hic latet æquivocatio. Cur enim (dum ab una aliqua ſtatuta tanquam prima perpendiculari procedatur ad alias) conſequentium perpendicularium anguli, ad eandem partem acuti, non fiant ſemper majores, quo uſque incidatur in angulum rectum, nimirum in talem perpendicularem, quæ ipſa ſit utriuſque prædictarum rectarum commune perpendiculum? Et iſtud quidem ſi accidat, evaneſcit latebroſa iſta Naſſaradini præparatio, poſtquam ingeniosè quidem, ſed magno cum labore Euclidæum Pronunciatum demonſtrat.

Quòd ſi Naſſaradinus jure quodam ſuo præſumere velit tanquam per ſe notam conſiſtentiam illam ad eandem partem angulorum acutorum: Cur non etiam (dicam cum Vallifio) concipi poteſt tanquam per ſe clarum: *Duas rectas in eodem plano convergentes* (in quas nempe alia recta incidens duos ad eaſdem partes angulos efficiat minores duobus rectis, ut putà unum rectum, & alterum quomodolibet acutum) *tandem occurſuras, ſi producantur?* Neque enim opponi poteſt, quòd major iſta ad unas partes convergentia ſubſiſtere ſemper poſſit intra quendam determinatum limitem, adeò ut nempe tanta quædam diſtantia inter eas lineas ad eam partem ſemper interſit, etiamſi cæteroquin una ad alteram ſemper propiùs accedat. Non, inquam, opponi id poteſt; quoniam ex hoc ipſo demonſtrabo, poſt XXV. hujus, omnium talium rectarum ad finitam diſtantiam occurſum, juxta Pronunciatum Euclidæum.

Jam tranſeo ad prælaudatum Joannem Valliſium, qui nempe, ut morem gereret tot Magnis Viris, Veteribus pariter, ac Recentioribus, & rurſum ex onere Cathedræ

dræ suæ Oxonienſi impoſito; hoc idem penſum aggredi voluit demonſtrandi ſæpe dictum Pronunciatum. Unicè autem aſſumit tanquam certum, quod ſequitur: nimirum *Datæ cuicunque figuræ ſimilem aliam cujuſcunque magnitudinis poſſibilem eſſe.* Et id quidem præſumi poſſe de qualibet figura (etiam ſi in rem ſuam unicè aſſumat triangularem rectilineam) benè argumentatur ex circulo, quem ſcilicet ſub quantolibet radio deſcribi poſſe omnes agnoſcunt. Deinde acutus Vir cautiſſimè obſervat præſumptioni huic ſuæ non obſtare, quòd prætet correſpondentium angulorum æqualitatem requiratur etiam correſpondentium omnium laterum proportionalitas, ut habeatur una figura rectilinea, v. g. triangularis, alteri rectilineæ triangulari ſimilis; cum tamen Proportionalium, ac ſubinde ſimilium Figurarum definitio ex Quinto, ac Sexto Euclidis Libro deſumendæ ſint: *Poterat enim Euclides* (inquit ipſe) *utramque Libro Primo præmiſiſſe.* Porrò autem, hoc ſtante (quod tamen negari à quopiam poſſet, niſi demonſtretur) intentum ſuum pulchro ſanè, atque ingenioſo molimine exequitur laudatus Vir.

Sed nolo oneri a me ſuſcepto in quoquam deeſſe. Itaque aſſumo duo triangula, unum *ABC*, & alterum *DEF* (fig. 24.) invicem æquiangula: Non dico planè ſimilia; quia non indigeo proportionalitate laterum circa angulos æquales, immo neque ullâ ipſorum laterum determinatâ menſurâ. Solùm igitur nolo triangula invicem æquilatera, quia tunc ſufficeret ſola octava primi, ſine ulla præſumptione. Itaque anguli ad puncta *A*, *B*, *C*, æquales ſint angulis ad puncta *D*, *E*, *F*; ſitque latus *DE* minus latere *AB*; aſſumaturque in *AB* portio *AG* æqualis ipſi *DE*, atque item in *AC* portio *AH* æqualis ipſi *DF*. Debere autem *DF* minorem eſſe ipsâ *AC* infrà declarabo. Tum (junctâ *GH*) conſtat (ex 4. primi) æquales fore angulos ad puncta E, & F, ipsis *AGH*, *AHG*. Quapropter; cum modò dicti anguli unà cum aliis *BGH*, *CHG*, æquales sint (ex 13. primi) quatuor rectis; quatuor itidem rectis æquales erunt anguli ad puncta *B*, & *C*, unà cum eisdem angulis *BGH*, *CHG*. Igitur quatuor simul anguli quadrilateri *BGHC* æquales erunt quatuor rectis; ac propterea (ex 16. hujus) stabilietur hypothesis anguli recti; & simul (ex 13. hujus) Pronunciatum Euclidæum.

Porrò supposui latus *DF*, sive *AH* sumptum ipsi æquale, minus fore latere *AC*. Si enim æquale foret, & sic punctum *H* caderet in punctum *C*; tunc angulus *BCA* æqualis foret (ex hypothesi) angulo *EFD*, sive *GCA* (qui tunc fieret) totum parti; quod est absurdum. Sin verò majus foret, & sic juncta *GH* secaret in aliquo puncto ipsam *BC*; jam angulus *ACB* externus æqualis foret ex hypothesi (contra 16. primi) angulo interno, & opposito (qui tunc fieret) *AHG*, sive *GHA*. Itaque bene supposui latus *DF* unius trianguli minus fore latere *AC* alterius trianguli, juxta hypothesim jam stabilitam.

Quare ex duobus quibusvis invicem æquiangulis triangulis, sed non etiam invicem æquilateris, stabilitur Pronunciatum Euclidæum. Quod intendebatur.

SCHOLION IV.

In quo exponitur figuralis quædam exhibitio, ad quam fortasse respexit Euclides, ut suum illud Pronunciatum tanquam per se notum stabiliret.

PRæmitto primò: sub quolibet angulo acuto *BAX* (recole ex hac Tab. Fig. 12.) educi posse ex aliquo puncto X ipsius *AX* quandam *XB*, quæ sub quovis designato etiamsi obtuso angulo *R*, qui nimirum cum eo acuto *BAX* deficiat à duobus rectis; quandam, inquam, educi posse *XB*, quæ ad finitam distantiam occurrat ipsi *AB* in quodam puncto *B*. Nam id ipsum jam demonstravi in Scholio post XIII. hujus.

Tab. III. Præmitto secundò: eas *AB*, *AX* (Fig. 25.) intelligi posse in infinitum protractas usque in quædam puncta *Y*, & *Z*; atque item prædictam *XB* (in infinitum & ipsam protractam usque in quoddam punctum *Y*) intelligi posse ita moveri super eâ *AZ* versùs partes puncti *Z*, ut angulus ad punctum X versùs partes puncti *A* æqualis semper sit dato cuivis obtuso angulo *R*.

Præmitto tertiò: nulli jam dubitationi obnoxium fore illud Pronunciatum Euclidæum, si antedicta *XY* in eo quantocunque motu super rectâ *AZ* secet semper illam *AY* in quibusdam punctis *B*, *D*, *H*, *P*, atque ita consequenter in aliis punctis remotioribus ab eo puncto *A*. Ratio evidens est; quia sic duæ quælibet in eodem plano existentes rectæ *AB*, *XH*, in quas recta quælibet incidens *AX* duos ad easdem partes angulos *BAX*, *HXA*, duobus rectis minores efficiat, convenire tandem ad eas partes deberent in uno eodemque puncto *H*.

Præmitto quartò: nulli item dubitationi locum fore super veritate præcedentis hypothetici assumpti; si posteriores illi externi anguli *YDH*, *YHP*, & sic alii quilibet consequentes, aut æquales semper sint priori externo angulo *YBD*, aut saltem non ita minores semper sint, quin eorum unusquisque major semper sit parvulo quopiam designato acuto angulo *K*: Hoc enim stante manifestum fiet, quòd ea *XY*, in suo illo quantocunque motu versùs partes puncti *Z*, nunquam cessabit secare prædictam *AY*; quod utique (ex præcedente notato) satis est ad stabilibilięndum Pronunciatum controversum:

Unicè igitur supereſt, ut quidam Adverſarius dicat angulos illos externos in majore, ac majore diſtantia ab illo puncto *A* fieri ſemper minores ſine ullo determinato limite. Inde autem fiet, ut illa *XY* in ſuo illo motu ſuper recta *AZ* occurrere tandem debeat ipſi *AY* in quodam puncto *P* ſine ullo angulo cum ſegmento *PY*, adeo ut nempe ſegmentum ejuſmodi commune ſit duarum rectarum *APY*, & *XPY*. At hoc evidenter repugnat naturæ lineæ rectæ.

Sin verò cuiquam minùs opportunus videatur angulus obtuſus ad illud punctum *X* versùs partes puncti *A*, nullo negotio ſupponi poterit rectus; adeò ut nempe (in motu prædictæ *XY* ad angulos ſemper rectos ſuper rectâ *AZ*) manifeſtiùs appareat ſingula illius *XY* puncta æquabiliter ſemper moveri relatè ad ſubjectam *AZ*; ac propterea nequire jam dictam *XY* tranſire de ſecante in non ſecantem alterius indefinitæ *AY*, niſi eam aut aliquando in aliquo puncto præcisè contingat, aut ipſi occurrat in aliquo puncto *P*, ubi cum eadem *AY* commune obtineat ſegmentum *PY*; quorum utrunque adverſari naturæ lineæ rectæ oſtendam ad XXXIII. hujus. Igitur juxta veram ideam lineæ rectæ, debebit illa *XY*, in quantacunque diſtantia puncti *X* a puncto *A*, occurrere ſemper in aliquo puncto ipſi *AY*. Atque id quidem (quantumlibet parvus ſupponatur acutus angulus ad punctum *A*) ſatis eſſe ad demonſtrandum, contra hypotheſim anguli acuti, Pronunciatum Euclidæum, conſtabit ex XXVII. hujus.

PROPOSITIO XXII.

Si duæ rectæ AB, CD *in eodem plano exiſtentes perpendiculariter inſiſtant cuidam rectæ* BD; *ipſa autem* AC *jungens ea perpendicula internos (in hypotheſi anguli acuti) acu-*

Tab. III. *tos angulos cum eiſdem efficiat: Dico (fig. 26.) rectas terminatas* AC, BD *commune aliquod habere perpendiculum, & quidem intra limites deſignatis punctis* A, *&* C *præfinitos*.

Demonſtratur. Si enim æquales ſint ipſæ *AB*, *CD*; conſtat (ex 2. hujus) rectam *LK*, a qua bifariam dividantur illæ duæ *AC*, & *BD*, commune fore eiſdem perpendiculum. Sin verò alterutra ſit major, ut putà *AB*: demittatur ad *BD* (juxta 12. primi) ex quovis puncto *L* ipſius *AC* perpendicularis *LK*, occurrens alteri *BD* in *K*. Occurret autem in aliquo puncto *K*, conſiſtente inter puncta *B*, & *D*; ne (contra 17. primi) perpendicularis *LK* ſecet alterutram *AB*, aut *CD*, perpendiculares eidem *BD*. Si ergo anguli ad punctum *L* recti non ſunt, unus eorum acutus erit, & alter obtuſus. Sit obtuſus versùs punctum *C*. Jam verò intelligatur *LK* ita procedere versùs *AB*, ut ſemper ad rectos angulos inſiſtat ipſi *BD*, atque item opportunè aucta, aut imminuta, in aliquo ſui puncto ſecet rectam *AC*. Conſtat angulos ad puncta interſectiva ipſius *AC* non poſſe omnes eſſe obtuſos versùs partes puncti *C*, ne tandem in ipſo puncto *A*, dum recta *LK* congruet cum recta *AB*, angulus ad punctum *A* versùs partes puncti *C* ſit obtuſus, cum ad eas partes poſitus ſit acutus. Quoniam ergo angulus ad punctum *L* ipſius *LK* poſitus eſt obtuſus versùs partes puncti *C*, non tranſibit in eo motu recta *LK* ad faciendum in aliquo ſui puncto cum recta *AC* angulum acutum versùs partes prædicti puncti *C*, niſi priùs tranſeat ad conſtituendum in aliquo ſui puncto cum eadem *AC* angulum rectum versùs partes ejuſdem puncti *C*. Erit igitur inter puncta *A*, & *L* unum aliquod punctum intermedium *H*, in quo *HK* perpendicularis ipſi *BD* ſit etiam perpendicularis alteri *AC*.

Simili modo oſtendetur adeſſe aliquam *XK* inter ipſas *LK*, *CD*, quæ ſit perpendicularis & rectæ *BD*, &

rectæ

rectæ *AC*, dum scilicet angulus obtusus ad punctum *L* ponatur consistere versùs partes puncti *A*.

Constat igitur rectas *AC*, *BD* commune aliquod habituras esse perpendiculum, & quidem intra limites designatis punctis *A*, & *C* præfinitos, quoties junctæ *AB*, *CD* in eodem plano existant, sintque perpendiculares ipsi *BD*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXIII.

Si duæ quælibet rectæ AX, BX (*fig.* 27.) *in eodem plano existant; vel unum aliquod* (*etiam in hypothesi anguli acuti*) *commune obtinent perpendiculum; vel in alterutram eandem partem protractæ, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat, semper magis ad se invicem accedunt.*

Demonstratur. Ex quolibet puncto *A* ipsius *AX* demittatur ad rectam *BX* perpendicularis *AB*. Si ipsa *BA* efficiat cum *AX* angulum rectum, habemus intentum communis perpendiculi. Cæterùm verò ea recta efficiat ad alterutram partem, ut putà versùs partes puncti **X**, angulum acutum. Itaque in prædicta recta *AX* designentur inter puncta *A*, & **X** quælibet puncta *D*, *H*, *L*, ex quibus demittantur ad rectam *BX* perpendiculares *DK*, *HK*, *LK*. Si unus aliquis angulus ad puncta *D*, *H*, *L* acutus sit versùs partes puncti *A*, constat (ex præcedente) unum aliquod adfuturum commune perpendiculum ipsarum *AX*, *BX*. Sin verò omnis hujusmodi angulus sit major acuto; vel unus aliquis erit rectus, & sic rursum habemus intentum communis perpendiculi, cum omnes anguli ad puncta K supponantur recti; vel omnes illi anguli ponuntur obtusi versùs partes puncti *A*, ac propterea omnes itidem acuti versùs partes puncti *X*, & sic rursum argumentor. Quoniam in quadrilatero *KDHK* recti sunt

angu-

anguli ad puncta *K*, ponitur autem acutus angulus ad punctum *D*, erit (ex Cor. II. post 3. hujus) latus *DK* majus latere *HK*. Simili modo ostendetur latus *HK* majus esse latere *LK*; atque ita semper, conferendo inter se perpendiculares ex quolibet puncto altiore ipsius *AX* demissas ad alteram *BX*. Quapropter ipsæ *AX*, *BX* semper magis versùs partes puncti *X* ad se invicem accedent: Quæ est altera pars propositi disjuncti.

Ex quibus omnibus constat duas quaslibet rectas *AX*, *BX*, quæ in eodem plano existant, vel unum aliquod (etiam in hypothesi anguli acuti) commune habere perpendiculum, vel in alterutram eandem partem protractas, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat, semper magis ad se invicem accedere. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

Hinc anguli versùs basim *AB* erunt semper obtusi ad illud punctum ipsius *AX*, ex quo demittitur perpendicularis ad rectam *BX*: erunt, inquam, semper obtusi, quoties duæ illæ *AX*, & *BX* semper magis ad se invicem accedant versùs partes punctorum *X*; quod quidem sano modo intelligi debet, nimirum de perpendicularibus demissis ante prædictum occursum, si fortè ad finitam distantiam una in alteram incidere debeat.

SCHOLION.

Video tamen inquiri hìc posse, qua ratione ostendendum sit commune illud perpendiculum; quoties recta quæpiam *PFHD* (fig. 28.) occurrens duabus *AX*, *BX* in punctis *F*, & *H*, duos ad easdem partes efficiat internos angulos *AHF*, *BFH*, non eos quidem rectos, sed tamen

æqua-

æquales simul duobus rectis. Ecce autem commune illud perpendiculum geometricè demonstratum. Divisâ *FH* bifariam in *M* demittantur ad *AX*, & *BX* perpendiculares *MK*, *ML*. Angulus *MFL* æqualis erit (ex 13. primi) angulo *MHK*, qui nempe supponitur duos rectos efficere cum angulo *BFH*. Præterea recti sunt anguli ad puncta *K*, & L; ac rursum æquales sunt ipsæ *MF*, *MH*. Igitur (ex 26. primi) æquales itidem erunt anguli *FML*, *HMK*. Quare angulus *HMK* duos efficiet rectos angulos cum angulo *HML*, prout cum eodem duos efficit rectos angulos (ex 13. primi) angulus *FML*. Igitur (ex 14. primi) una erit recta linea continuata ipsa *KML*, commune idcirco perpendiculum prædictis rectis *AX*, *BX*. Quod erat &c.

COROLLARIUM II.

SEd rursum docere hinc possum, quòd illæ duæ *AX*, *BX*, in quas incidens recta *PFHD*, aut duos efficiat cum ipsis *AX*, *BX* internos ad easdem partes angulos æquales duobus rectis; aut consequenter (ex 13. & 15. primi) alternos sive externos, sive internos angulos inter se æquales; aut rursum, eodem titulo, externum (ut putà *DHX*) æqualem interno, & opposito *HFX*: quòd, inquam, illæ duæ rectæ neque ad infinitam earundem productionem coire inter se possint. Si enim ex quolibet puncto *N* ipsius *AX* demittatur ad *BX* perpendicularis *NR*, erit hæc in ipsa hypothesi anguli acuti (quæ utique sola obesse nobis posset) major (ex Cor. I. post 3. hujus) eo communi perpendiculo *KL*. Non igitur illæ duæ *AX*, *BX* convenire unquam inter se poterunt.

Porrò autem demonstratas hinc habes Propos. 27. & 28. Libri primi Euclidis; & quidem citra immediatam dependentiam a præcedentibus 16. & 17. ejusdem primi, cirea quas oriri posset difficultas, quoties sub basi finita infinitilaterum esset triangulum; ad quale nempe triangulum provocare non dubitaret, qui eas duas *AX*, *BX* ad infinitam saltem distantiam inter se coituras censeret, quamvis anguli ad incidentem *PFHD* tales forent, quales supposuimus.

Præterea, propter demonstratum commune perpendiculum *KL*, nequirent sanè illæ duæ *KX*, *LX* ad suam partem punctorum X simul concurrere, quin etiam (ex facili intellecta superpositione) ad alteram etiam parte n simul concurrerent reliquæ & ipsæ interminatæ *KA*, *LB*. Quare duæ rectæ *AX*, *BX* clauderent spatium; quod est contra naturam lineæ rectæ.

Sed hæc posteriora sunt. Nam in præcedentibus nusquam adhibui aut 16. aut 17. primi, nisi ubi clarè ageretur de triangulo omni ex parte circumscripto, prout nempe in Proemio ad Lectorem ita me curaturum spoponderam.

PROPOSITIO XXIV.

Iisdem manentibus: Dico quatuor simul angulos (fig. 27.) quadrilateri KDHK *proximioris basi* AB *minores esse (in hypothesi anguli acuti) quatuor simul angulis quadrilateri* KHLK *remotioris ab eadem basi; atque ita quidem, sive illæ duæ* AX, BX *aliquando ad finitam distantiam incidant versùs partes puncti* X; *sive nunquam inter se incidant; sed versùs eas partes aut semper magis ad se invicem accedant, aut aliquando recipiant commune perpendiculum, post quod nempe (juxta Cor. II. præc. Propos.) ad easdem partes incipiant invicem dissilire.*

Demonstratur. Verùm hic supponimus portiones *KK* sumptas esse invicem æquales. Quoniam igitur (ex præceden cedente) latus DK majus eſt latere HK, ac ſimiliter HK majus latere LK; ſumatur in HK portio MK æqualis ipſi LK, & in DK portio NK æqualis ipſi HK; junganturque MN, MK, LK; nimirum punctum K intermedium cum puncto L, & punctum K vicinius puncto B cum puncto M. Jam ſic progredior. Quandoquidem latera trianguli KKL (initium ſemper ducam à puncto K viciniore puncto B) æqualia ſunt lateribus trianguli KKM, & anguli comprehenſi æquales, utpotè recti; æquales etiam erunt (ex 4. primi) baſes LK, MK; atque item æquales, qui correſpondent invicem anguli, ad eaſdem baſes, nimirum angulus KLK angulo KMK, & angulus LKK angulo MKK. Igitur æquales etiam ſunt reſidui NKM, & HKL. Quare, cum latera NK, KM trianguli NKM æqualia itidem ſint lateribus HK, KL trianguli HKL; æquales etiam erunt (ex eadem 4. primi) baſes NM, HL; anguli KNM, KHL; ac tandem anguli KMN, KLH. Sunt autem in prioribus triangulis jam probati æquales anguli KLK, & KMK. Igitur totus angulus NMK æqualis eſt toti angulo HLK. Quare, cum omnes ad puncta K anguli ſint recti, manifeſtè conſequitur omnes ſimul quatuor angulos quadrilateri $KNMK$ æquales eſſe omnibus ſimul quatuor angulis quadrilateri $KHLK$. Quoniam verò duo ſimul anguli ad puncta N, & M in quadrilatero $KNMK$ majores ſunt, in hypotheſi anguli acuti, duobus ſimul angulis (ex Cor. poſt XVI. hujus) ad puncta D, & H in quadrilatero $NDHM$, ſeu quadrilatero $KDHK$; conſequens inde eſt, ut (additis communibus rectis angulis ad puncta K) quatuor ſimul anguli quadrilateri $KNMK$, ſeu quadrilateri $KHLK$, majores ſint (in hypotheſi anguli acuti) quatuor ſimul angulis quadrilateri $KDHK$. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

SEd opportunè observari hic debet, nihil defuturum factæ argumentationi, quamvis angulus ad punctum *L* poneretur rectus; juxta hypothesin anguli acuti. Nam adhuc illa communis perpendicularis *L*K minor foret (ex Cor. I. post III. hujus) altera perpendiculari *H*K, ex qua propterea sumi adhuc posset portio *M*K æqualis prædictæ *L*K: Quo stante constat nullum posse obicem intercurrere.

SCHOLION.

DUbitari nihilominus posset, an ex quolibet puncto K (assumpto nimirum in *BX* ante occursum ipsius *BX* in alteram *AX*) perpendicularis educta versùs partes rectæ *AX* occurrere huic debeat (fig. 29.) in aliquo puncto *L*; dum nempe illæ duæ, ante prædictum occursum, ponantur ad se invicem semper magis accedere. Ego autem dico ita omnino secuturum.

Demonstratur. Assignatum sit in *BX* quodvis punctum K. Sumatur in *AX* quædam *AM* æqualis summæ ex ipsâ *B*K, & duplâ *AB*. Tum ex puncto *M* ducatur ad *BX* (juxta 12. primi) perpendicularis *MN*: Erit *MN* (juxta præsentem suppositionem) minor ipsâ *AB*. Quare *AM* (facta æqualis summæ ex ipsâ *B*K, & duplâ *AB*) major erit summâ ipsarum *B*K, *AB*, & *NM*. Jam ostendere oportet eandem *AM* minorem esse summâ ipsarum *BN*, *AB*, & *MN*, ut inde constet eam *BN* majorem esse prædictâ *B*K, ac propterea punctum K jacere inter puncta *B*, & *N*. Jungatur *BM*. Erit latus *AM* (ex 20. primi) minus duobus simul reliquis lateribus *AB*, & *BM*. Rursum

latus

latus BM (ex eadem 20. primi) minus erit duobus simul lateribus BN, & MN. Igitur latus AM multò minus erit tribus simul lateribus AB, BN, & NM. Hoc autem erat ostendendum, ut constaret punctum K jacere inter puncta B, & N. Inde autem consequens est, ut perpendicularis ex puncto K educta versùs partes ipsius AX occurrere huic debeat in aliquo puncto L inter puncta A, & M constituto; ne scilicet (contra 17. primi) secare debeat alterutram AB, aut MN perpendiculares eidem BX. Quod &c.

PROPOSITIO XXV.

SI *duæ rectæ (fig. 30.)* AX, BX *in eodem plano existentes (una quidem sub angulo acuto in puncto* A, *& altera in puncto* B *perpendiculariter insistens ipsi* AB*) ita ad se invicem semper magis accedant versùs partes punctorum* X, *ut nihilominus earundem distantia semper major sit assignatâ quadam longitudine, destruitur hypothesis anguli acuti.*

Demonstratur. Assignata sit longitudo R. Si ergo in ea BX sumatur quædam BK quantumlibet multiplex propositæ longitudinis R; constat (ex præcedente Scholio) perpendicularem ex puncto K eductam versùs partes ipsius AX in aliquo puncto L eidem occursuram; ac rursum (ex præsente hypothesi) constat eam KL majorem fore prædicta longitudine R. Porrò intelligatur BK divisa in portiones KK, æquales singulas ipsi R, usque dum KB æqualis sit ipsi longitudini R. Tandem verò ex punctis K erectæ sint ad BX perpendiculares occurrentes ipsi AX in punctis L, H, D, M, usque ad punctum N proximius puncto A. Jam sic progredior.

Erunt (ex Prop. præcedente) quatuor simul anguli quadrilateri KHLK, remotioris ab ea basi AB, majores quatuor simul angulis quadrilateri KDHK; proximioris eidem basi; cujus itidem quadrilateri quatuor simul anguli majores erunt quatuor simul angulis subsequentis versùs eandem basim quadrilateri KMDK. Atque ita semper usque ad ultimum quadrilaterum KNAB, cujus utique quatuor simul anguli minimi erunt, relatè ad quatuor simul angulos singulorum ascendentium versùs puncta *X* quadrilaterorum.

Quoniam verò tot aderunt prædicto modo recensita quadrilatera, quot sunt præter basim *AB* demissæ ex punctis ipsius *AX* ad rectam *BX* perpendiculares; expendenda est summa omnium simul angulorum, qui comprehenduntur in illis quadrilateris. Ponamus esse novem ejusmodi perpendiculares demissas, ac propterea novem itidem quadrilatera. Constat (ex 13. primi) æquales esse quatuor rectis angulos hinc inde comprehensos ad bina puncta illarum octo perpendicularium, quæ mediæ jaceant inter basim *AB*, & remotiorem perpendicularem *L*K. Itaque summa horum omnium angulorum erit 32. rectorum. Restant duo anguli ad perpendiculum *L*K, & duo ad basim *AB*. At anguli, unus quidem ad punctum K, & alter ad punctum *B*, supponuntur recti; angulus autem ad punctum *L* (ex Cor. post **XXIII.** hujus) est obtusus. Quapropter (etiam neglecto angulo acuto ad punctum *A*) summa omnium angulorum, qui comprehenduntur ab illis novem quadrilateris, excedet 35. rectos. Inde autem fit, ut quatuor simul anguli quadrilateri K*HL*K, remotioris a basi, minùs deficiant a quatuor rectis, quàm sit nona pars unius recti; & id quidem etiam si æqualis portio prædictæ omnium angulorum summæ contingeret singulis illis quadrilateris. Ergo minor adhuc erit insinuatus defectus, cum summa quatuor simul angulorum illius quadrilateri K*HL*K ostensa sit omnium maxima, relatè ad

qua-

quatuor simul angulos reliquorum quadrilaterorum.

Sed rursum; juxta suppositionem, in qua procedit hæc Propositio; assumi potest tanta longitudo ipsius *Bk*, ut confici semper possint non tot quin plura quadrilatera sub basibus kk, æqualibus singulis illi assignatæ longitudini *R*. Quare defectus quatuor simul angulorum illius remotioris quadrilateri k*HL*k a quatuor rectis ostendetur semper minor & unâ centesimâ, & unâ millesimâ, & sic sub quolibet assignabili numero unâ portiunculâ unius recti.

Porrò autem erunt semper (juxta prædictam suppositionem) ipsæ *L*k, & *H*k majores designata longitudine *R*. Si ergo in k*L*, & k*H* sumantur k*S*, & k*T* æquales ipsi kk, seu longitudini *R*; erunt, junctâ *ST*, duo simul anguli k*ST*, k*TS* majores, in hypothesi anguli acuti, duobus simul angulis (ex Cor. post XVI. hujus) ad puncta *H*, & *L* in quadrilatero *THLS*, seu quadrilatero k*HL*k; ac propterea (additis communibus rectis angulis ad puncta k, k) erunt quatuor simul anguli quadrilateri k*TS*k majores quatuor simul angulis illius quadrilateri k*HL*k.

Jam verò: cum ex una parte stabile sit, ac datum quadrilaterum k*TS*k, utpotè constans data basi kk, quæ nimirum æqualis ponitur assignatæ longitudini *R*, ac rursum constans duobus perpendiculis *T*k, *S*k eidem basi æqualibus, ac tandem jungente *TS*, quæ evadit omnino determinata; & ex altera quatuor simul anguli stabilis illius, ac dati quadrilateri, ostensi jam sint majores quatuor simul angulis quadrilateri k*HL*k quantumlibet distantis ab ea basi *AB*: consequens utique fit, ut quatuor simul anguli stabilis illius, ac dati quadrilateri k*TS*k majores sint qualibet angulorum summâ, quæ quomodolibet deficiat a quatuor rectis; quandoquidem ostensum jam est designari semper posse tale aliquod quadrilaterum k*HL*k;

cujus

cujus quatuor simul anguli minus deficiant à quatuor rectis, quàm sit quævis designabilis unius recti portiuncula. Igitur quatuor simul anguli stabilis illius, ac dati quadrilateri, vel æquales sunt quatuor rectis, vel eisdem majores. Tunc autem (ex XVI. hujus) stabilitur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi; ac propterea (ex V. & VI. hujus) destruitur hypothesis anguli acuti.

Itaque constat destructum iri hypothesim anguli acuti, si duæ rectæ in eodem plano existentes ita ad se invicem semper magis accedant, ut nihilominus earundem distantia major semper sit assignatâ quadam longitudine. Hoc autem erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

AT (destructâ hypothesi anguli acuti) manifestum fit, ex 13. hujus, controversum Pronunciatum Euclidæum; prout a me hoc loco declaratum iri spopondi in Scholio III. post XXI. hujus, ubi de conatu Nassaradini Arabis locuti sumus.

COROLLARIUM II.

RUrsum ex hac Propositione, & ex præcedente XXIII. manifestè colligitur satis non esse ad stabiliendam Geometriam Euclidæam duo puncta sequentia. Unum est: quòd nomine parallelarum illas rectas censeamus, quæ in eodem plano existentes commune aliquod obtinent perpendiculum. Alterum verò, quòd omnes rectæ in eodem plano existentes, quarum nullum commune sit perpendiculum, ac propterea quæ juxta assumptam Definitionem parallelæ non sint, debeant ipsæ in alterutram partem semper magis protractæ inter se aliquando incidere, si non ad fini-

finitam, saltem ad infinitam distantiam? Nam rursum demonstrare oporteret, quòd duæ quælibet in eodem plano existentes, in quas recta quæpiam incidens duos ad easdem partes internos angulos efficiat minores duobus rectis, nusquam alibi possint ipsæ recipere commune perpendiculum. Quòd autem, hoc demonstrato, exactissimè stabiliatur Geometria Euclidæa, infrà constabit.

PROPOSITIO XXVI.

SI *prædictæ* AX, BX (*fig.* 31.) *coire quidem inter se debeant, sed non nisi ad infinitam earundem productionem versùs partes punctorum* X: *Dico nullum fore assignabile punctum* T *in ipsa* AB, *ex quo perpendicularis educta versùs partes ipsius* AX *non occurrat ad finitam, seu terminatam distantiam eidem* AX *in aliquo puncto* F.

Demonstratur. Nam (ex præcedente hypothesi) unum aliquod erit in ipsa *AX* punctum *N*, ex quo perpendicularis *Nk* demissa ad *BX* minor sit qualibet assignata longitudine, ut putà eâ *TB*. Tum verò sumatur in *TB* portio *CB* æqualis ipsi *Nk*, jungaturque *CN*. Constat angulum *NCB* acutum fore, in hypothesi anguli acuti. Ergo (ex 13. primi) obtusus erit, qui deinceps est angulus *NCT*. Igitur recta, quæ ex puncto *T* (inter puncta *A*, & *C* constituto) perpendiculariter educatur versùs partes ipsius *AX*, non incidet (ex 17. primi) in ullum punctum ipsius *CN*; ac propterea (ne claudat spatium cum *AT*, aut cum *TC*) occurret ipsi terminatæ *AN* in aliquo puncto *F*. Igitur in ipsa etiam hypothesi anguli acuti (quam scimus obesse unicè hic posse) nullum erit assignabile punctum *T* in ea *AB*, ex quo perpendiculariter educta versùs partes ipsius *AX* non occurrat ad finitam, seu terminatam distantiam eidem *AX* in quodam puncto *F*. Quod &c.

CO-

COROLLARIUM I.

INde autem fit, ut assumpto in AB protractâ quolibet puncto M, ex quo versùs partes punctorum X educatur perpendicularis MZ, nequeat ipsa, etiamsi infinitè producatur, occurrere prædictæ AX; quia cæterùm illa altera BX deberet (ex præmissa demonstratione) ad finitam distantiam occurrere eidem AX; quod est contra præsentem hypothesin.

COROLLARIUM II.

EX quo rursum consequitur omnem perpendiculariter eductam ex quolibet puncto illius quantumlibet continuatæ AB, sed non tamen infinitè dissito, debere ad finitam distantiam occurrere prædictæ AX; quatenus nempe supponatur omnem talem perpendiculariter eductam semper magis, sine ullo certo limite accedere ad alteram semper continuatam AX.

COROLLARIUM III.

UNde tandem fit, ut ab illa AX neque ad infinitam ejusdem productionem secari possit ipsa BX; quia cæterum ex quodam illius AX ultra prædictam sectionem puncto intelligi posset demissa ad AB productam quædam perpendicularis ZM; unde rursum fieret, ut ipsa BX (contra præsentem hypothesim) non ad infinitam, sed omnino ad finitam distantiam occurreret prædictæ AX. Sed hoc postremum dictum sit ultra necessitatem.

PRO-

SI recta AX (*fig.* 32.) *sub aliquo, ut libet, parvo angulo educta ex puncto* A *ipsius* AB, *occurrere tandem debeat* (*saltem ad infinitam distantiam*) *cuivis perpendiculari* BX, *quæ ad quantamlibet ab eo puncto* A *distantiam excitari intelligatur super ea incidente* AB: *Dico nullum jam fore locum hypothesi anguli acuti*.

Demonstratur. Ex quodam puncto k prope punctum *A*, ad libitum in ipsa *AB* designato, erigatur ad *AB* perpendicularis k*L*, quæ utique (ex Cor. II. præcedentis Propositionis) occurret ipsi *AX* ad finitam, seu terminatam distantiam in aliquo puncto *L*. Jam verò constat sumi posse in k*B* portiones k k æquales singulas cuidam assignabili longitudini *R*, & eas plures quolibet assignabili numero finito; quandoquidem punctum *B* statui potest; juxta præsentem suppositionem; in quantalibet distantia ab eo puncto *A*. Itaque ex aliis punctis k erigantur ad *AB* perpendiculares k*H*, k*D*, k*P*, quæ omnes (ex præcitato Corollario) occurrent rectæ *AX* in quibusdam punctis *H*, *D*, *P*; atque ita circa reliqua puncta k uniformiter designata versùs punctum *B*. Constat secundò (ex 16. primi) angulos ad puncta *L*, *H*, *D*, *P*, fore omnes obtusos versùs partes punctorum *X*; atque item (ex 13. ejusdem primi) angulos ad prædicta puncta fore omnes acutos versùs punctum *A*. Igitur (ex Cor. II. post 3. hujus) latus k*H* majus erit latere k*L*; latus k*D* majus latere k*H*; atque ita semper, procedendo versùs puncta *X*. Constat tertiò quatuor simul angulos quadrilateri k*LH*k majores fore quatuor simul angulis quadrilateri k*HD*k: nam id in simili demonstratum jam est in XXIV. hujus. Constat quartò idem similiter valere de quadrilatero k*HD*k relatè ad quadrilaterum *KDP*k; atque ita semper, procedendo ad quadrilatera remotiora ab eo puncto *A*.

Quoniam igitur tot aderunt (ut in XXV. hujus) prædicto modo recensita quadrilatera, quot sunt, præter primam *Lk*, demissæ ex punctis ipsius *AX* perpendiculares ad rectam *AB*; constabit uniformiter (si ponamus novem, præter primam, demissas ejusmodi perpendiculares) summam omnium angulorum, qui comprehenduntur ab illis novem quadrilateris, excedere 35. rectos; ac propterea quatuor simul angulos primi quadrilateri k*LH*k, quod quidem in hac ratione ostensum est omnium maximum, minùs deficere à quatuor rectis, quàm sit nona pars unius recti. Quare; multiplicatis ultra quemlibet assignabilem finitum numerum eisdem quadrilateris, procedendo semper versùs partes punctorum *X*; constabit similiter (ut in eadem præcitata) quatuor simul angulos stabilis illius quadrilateri k*HL*k minùs deficere à quatuor rectis, quàm sit quælibet assignabilis unius recti portiuncula. Igitur quatuor simul illi anguli vel æquales erunt quatuor rectis, vel eisdem majores. Tunc autem (ex XVI. hujus) stabilitur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi; ac propterea (ex V. & VI. hujus) destruitur hypothesis anguli acuti.

Itaque constat nullum jam fore locum hypothesi anguli acuti, si recta *AX* sub aliquo, ut libet, parvo angulo, educta ex puncto *A* ipsius *AB* occurrere tandem debeat (saltem ad infinitam distantiam) cuivis perpendiculari *BX*, quæ ad quantamlibet ab eo puncto *A* distantiam excitari intelligatur super eâ incidente *AB*. Quod erat &c.

SCHOLION I.

ET hoc est, quod prædixi in Cor. II. post XXV. hujus; nullum scilicet superfuturum locum hypothesi anguli

guli

guli acuti, seu stabilitum exactissimè iri Geometriam Euclidæam; si duæ quælibet in eodem plano existentes rectæ, ut putà *AX*, *BX*, in quas incidens recta *AB* (sumpto puncto *B* in quantalibet distantiâ a puncto *A*) duos cum eisdem ad easdem partes punctorum X angulos efficiat minores duobus rectis; si (inquam) nusquam alibi (hoc stante) possint illæ recipere commune perpendiculum. Tunc enim illæ duæ *AX*, *BX* semper magis ad se invicem accedent; nimirum vel intra quendam determinatum limitem, prout in XXV. hujus; vel sine ullo certo limite, ac propterea usque ad occursum saltem post infinitam productionem, prout in hac XXVII. Constat autem in utroque prædictorum casuum ostensam jam esse destructionem hypothesis anguli acuti. Quod intendebatur.

SCHOLION II.

Atque id rursum est, quod spopondi in fine Scholii IV. post XXI. hujus, prout ex ipsis terminis clarè elucescit.

SCHOLION III.

PRæterea observari hic velim discrimen inter hanc Propos. & præcedentem XVII. Nam ibi (recole fig. 15.) ostensa est destructio hypothesis anguli acuti, si (existente, ut libet parvâ, rectâ *AB*) omnis *BD* sub quovis acuto angulo educta, occurrere tandem debeat in quodam puncto *K* ipsi perpendiculari *AH* productæ. Hic autem (viceversâ) permittitur quidem designatio cujusvis parvissimi acuti anguli ad punctum *A*, dum tamen interjecta *AB*, ad quam erigenda est perpendicularis indefinita Tab. II.

 BX,

BX, statui possit quantælibet longitudinis.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duæ rectæ AX, BX *(quarum prior sub angulo acuto, & altera ad perpendiculum eductæ sint versùs easdem partes ex quantalibet recta* AB *) semper magis sine ullo certo limite ad se invicem accedant, præterquam ad infinitam earundem productionem; Dico omnes angulos (fig. 33.) ad quælibet puncta* L, H, D *ipsius* AX, *ex quibus demittantur ad rectam* BX *perpendiculares* LK, HK, DK; *tum fore omnes obtusos versùs partes puncti* A; *tum fore semper minores, qui magis distant ab eo puncto* A; *ac tandem angulos magis, ac magis distantes ab eodem puncto* A, *semper magis sine ullo certo limite accedere ad æqualitatem cum angulo recto.*

Tab. IV.

Demonstratur. Et prima quidem pars constat ex Cor. I. post XXIII. hujus. Secunda verò pars ita evincitur. Nam duo simul anguli ad *LK* versùs basim *AB* majores sunt (ex Cor. post XVI. hujus) duobus simul internis, & oppositis angulis ad *HK* versùs eandem basim *AB*. Sunt autem inter se æquales, utpote recti, anguli ad utrumque punctum K versùs basim *AB*. Ergo angulus obtusus ad *L* versùs basim *AB* major est angulo obtuso ad *H* versùs eandem basim *AB*. Simili modo ostendetur prædictum angulum obtusum ad *H* majorem esse angulo obtuso ad punctum *D*. Atque ita semper, procedendo versùs puncta *X*.

Tertia tandem pars majore indiget disquisitione. Si ergo fieri potest, assignatus sit (fig. 34.) quidam angulus *MNC*, quo semper major sit, aut saltem non minor, excessus cujusvis ex prædictis angulis obtusis supra angulum rectum. Constat (ex XXI. hujus) latera *NM*, *NC* comprehendentia illum angulum *MNC* taliter produci posse, ut perpendicularis *MC*, ex quodam puncto *M* ipsius *MN*

de-

demissa ad *NC*, major sit (in ipsa etiam hypothesi anguli acuti) qualibet finitâ assignatâ longitudine, ut putà prædictâ basi *AB*. Hoc stante: assumatur in *BX* (fig. 35.) quædam *BT* æqualis ipsi *CN*; educaturque ex puncto *T* versùs *AX* perpendicularis *TS*, quæ nempe (ex Scholio post XXIV. hujus) occurret ipsi *AX* in quodam puncto *S*. Deinde ex puncto *S* demittatur ad *AB* perpendicularis *SQ*. Cadet hæc (propter 17. primi) ad partes anguli acuti *SAB* inter puncta *A*, & *B*. Porrò acutus erit angulus *QST* in quadrilatero *QSTB*, cum reliqui tres anguli sint recti; ne (contra V. & VI. hujus) incidamus in hypothesin aut anguli recti, aut anguli obtusi. Hinc recta *SQ* major erit (ex Cor. I. post 3. hujus) rectâ *BT*, sive *CN*; ac rursum angulus *ASQ* major erit excessu, quo angulus obtusus *AST* excedit angulum rectum, & sic major angulo *MNC*. Ducatur igitur quædam *SF* secans *AQ* in *F*, & efficiens cum *SA* angulum æqualem ipsi *MNC*. Deinde ex puncto *A* ducatur ad *SF* productam perpendicularis *AO*. Cadet punctum *O* (ex 17. primi) infra punctum *F*, cum angulus *AFS* (ex 16. ejusdem primi) sit obtusus. Tandem verò; cum *FS* major sit (ex 18. primi) ipsâ *QS*, & sic multò major ipsâ *BT*, sive *CN*; sumatur in *FS* portio *IS* æqualis ipsi *CN*, & ex puncto *I* erigatur ad *FS* perpendicularis *IR* occurrens in puncto *R* ipsi *AS*. Cadet autem punctum *R* inter puncta *A*, & *S*: si enim caderet in aliquod punctum ipsius *AF*, haberemus in eodem triangulo (contra 17. primi) duos angulos majores duobus rectis, cum angulus ad punctum *F* versùs partes puncti *A* ostensus jam sit obtusus.

Post tantum apparatum sic concludo. Quandoquidem in quadrilatero *AOIR* recti sunt anguli ad puncta *O*, & *I*; & est acutus angulus (ex 17. primi) ad punctum *A*, propter rectum angulum *AOS*; ac rursum est obtusus (ex 16. ejus-

ejusdem primi) angulus IRA, cum rectus sit angulus RIS: consequens tandem est (ex Cor. II. post 3 hujus) ut latus AO majus sit latere IR. At (junctâ OQ) latus AQ majus est (ex 18. primi) latere AO propter angulum obtusum in O, cum angulus AOS factus sit rectus. Igitur recta AQ multò major erit rectâ IR, sive (ex 26. primi) rectâ NC, & sic multò major rectâ AB, pars toto; quod est absurdum.

Non igitur ullus assignari potest angulus MNC, quo semper major sit, aut saltem non minor excessus cujusvis ex prædictis angulis obtusis supra angulum rectum. Quare anguli illi obtusi, magis ac magis distantes ab eo puncto A, semper magis sine ullo certo limite accedent ad æqualitatem cum angulo recto. Quod erat postremo loco demonstrandum.

COROLLARIUM.

HOc autem stante, quod postremo loco demonstratum est, manifestè consequitur, duas illas AX, BX, in infinitum protractas, commune tandem habituras, vel in duobus distinctis punctis, vel in uno, eodemque puncto X infinitè dissito, perpendiculum. Rursum verò, quòd non in duobus distinctis punctis haberi possit commune istud perpendiculum, ex eo manifestè liquet; quia cæterum (ex Cor. II. post XXIII. hujus) inciperent inde illæ rectæ invicem dissilire, & sic neque ad infinitam distantiam inter se concurrerent; quin etiam (contra expressam suppositionem) non ad se invicem, sine ullo certo limite, semper magis versùs eas partes accederent. Itaque in uno, eodemque puncto X infinitè dissito commune haberent perpendiculum.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

R*Esumptâ fig.* (33.) *præcedentis Propositionis: Dico omnem rectam* AC, *quæ secet angulum* BAX, *aliquando ad finitam, seu terminatam distantiam (etiam in hypothesi anguli acuti) occursuram ipsi* BX *in quodam puncto* P, *dum nempe illa* AC *semper magis protrahatur versùs partes punctorum* X.

Demonstratur. Et primò quidem (ne recta *AC* spatium claudat cum ea *AX*) occurret ipsa ad finitam distantiam rectis *LK*, *HK*, *DK* in quibusdam punctis *C*, *N*, *M*; occurret, inquam, nisi antea (ad finitam utique distantiam, prout intendimus) occurrat ipsi *BX* in aliquo puncto inter punctum *B*, & unum aliquod punctorum *K* constituto. Deinde (ex Cor. I. post XXIII. hujus) obtusi erunt anguli *ACK*, *ANK*, *AMK*. Præterea anguli isti, semper obtusi, accedent (ex præcedente) sine ullo certo limite ad æqualitatem cum angulo recto, quoties nempe illa *AC* non nisi ad infinitam distantiam occursura putetur ipsi *BX*. Igitur deveniri posset ad talem ordinatam K*MD*, ad quam angulus *AMK* minùs superaret angulum rectum, quàm sit ille angulus *DAC*. Tunc autem angulus *DAC*, sive *DAM*, unà cum angulo *AMD* major erit uno recto. Quare; addito obtuso angulo *ADM*; tres simul anguli trianguli *ADM* majores erunt duobus rectis, quod est contra hypothesin anguli acuti. Igitur omnis recta *AC*, quæ secet illum angulum *BAX*, aliquando ad finitam, seu terminatam distantiam (etiam in hypothesi anguli acuti) occurret ipsi *BX* in quodam puncto *P*. Quod &c.

COROLLARIUM I.

HInc nulla *AZ*, quæ versùs partes punctorum X angulum acutum efficiat majorem illo *BAX*, occurrere unquam poterit, sive ad finitam, sive ad infinitam distantiam ipsi *BX*. Quatenus enim ita contingeret, jam illa *AX*, dividens angulum *BAZ*, deberet (contra præmissam suppositionem) ad finitam distantiam occurrere ipsi *BX*; prout demonstratum id est de recta *AC* dividente angulum *BAX*.

COROLLARIUM II.

PRæterea sequitur nullum fore determinatum acutum angulum omnium maximum, sub quo educta ex puncto *A* ad finitam distantiam occurrat illi *BX*. Si enim versùs partes puncti X punctum quodvis assumas, quod sit altius puncto *P*, constat rectam jungentem punctum *A* cum illo puncto altiore majorem angulum effecturam cum ipsa *AB*, quàm sit angulus *BAP*. Atque ita semper sine ullo termino intrinseco. Quare angulus *BAX* (dum scilicet ipsa *AX*, & semper accedat ad eam *BX*, & non nisi ad infinitam distantiam in eandem incidat) erit limes extrinsecus acutorum omnium angulorum, sub quibus rectæ eductæ ex illo puncto *A* ad finitam distantiam occurrunt prædictæ *BX*.

PROPOSITIO XXX.

C*Uivis terminatæ* AB *insistat ad perpendiculum (fig. 36.) quædam indefinita* BX. *Dico primò rectam* AY, *perpendiculariter elevatam versùs partes easdem super illâ* AB, *fore limitem unum intrinsecum earum omnium, quæ ex illo puncto*

A *ver-*

A versùs easdem partes eductæ commune aliquod (juxta hypothesin anguli acuti) in duobus distinctis punctis obtinent perpendiculum cum alterâ indefinitâ BX. *Dico secundò nullum fore acutum angulum omnium minimum, sub quo educta ex prædicto puncto* A *commune aliquod (juxta prædictam hypothesin) in duobus distinctis punctis obtineat perpendiculum cum eadem* BX.

Demonstratur prima pars. Quoniam enim illa *AY* commune obtinet cum altera *BX* perpendiculum *AB* in duobus distinctis punctis *A*, & *B*; si educatur versùs easdem partes sub angulo obtuso quæpiam *AZ*, constat nullum ad eas partes esse posse in duobus distinctis punctis commune perpendiculum ipsarum *AZ*, *BX*; ne scilicet ex consecuturo quadrilatero continente quatuor angulos majores quatuor rectis incidamus (ex XVI. hujus) in hypothesin jam reprobatam anguli obtusi, contra suppositam hoc loco hypothesin anguli acuti. Igitur illa perpendicularis *AY* erit ex ista parte limes intrinsecus earum omnium, quæ ex illo puncto *A* versùs easdem partes eductæ commune aliquod (juxta illam hypothesin anguli acuti) in duobus distinctis punctis obtineant perpendiculum cum alterâ indefinitâ *BX*. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Si enim fieri potest; esto quidam angulus acutus omnium minimus, sub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus distinctis punctis perpendiculum *ND*. Tum assumpto in *BX* altiore puncto k, ex eo educatur ad *BX* perpendicularis *KL*, ad quam ex puncto *A* demittatur (juxta 12. primi) perpendicularis *AL*. Jam verò, si hæc *AL* occurrat in quodam puncto *S* ipsi *ND*, constat sanè angulum *BAL* minorem fore eo *BAN*, qui propterea non erit omnium minimus, sub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus distinctis punctis perpendiculum *ND*.

Porrò autem ab ea perpendiculari *AL* secari prædictam *ND* in quodam ejus intermedio puncto *S* sic demonstratur.

Et primò quidem non posse ab ea *AL* secari ipsam *BK* in quodam puncto *M* constare absolutè potest ex 17. primi, ne scilicet in eodem triangulo *MKL* duos habeamus angulos rectos in punctis *K*, & *L*; præterquam quòd in hoc ipso haberemus intentum contra illum angulum *BAN*, ne scilicet in hac tali ratione censeatur omnium minimus. Rursum verò nequit *AL* esse continuatio ipsius *AN*; quia cæterum in quadrilatero *NDKL* quatuor haberemus angulos rectos, contra hypothesim anguli acuti. Sed neque eam *DN* protractam secare potest in quovis ulteriore puncto *H*; quia angulus *AHN* (ex 16. primi) foret acutus, propter suppositum rectum angulum externum *AND*; ac propterea angulus *DHL* foret obtusus, & sic in quadrilatero *DHLK* quatuor haberemus angulos, qui simul sumpti majores forent quatuor rectis, contra prædictam hypothesin anguli acuti. Igitur constat ab ea *AL* secari debere angulum *BAN*, qui propterea nequit dici omnium minimus, sub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus distinctis punctis perpendiculum *ND*. Quod erat secundo loco demonstrandum. Itaque constat &c.

COROLLARIUM.

Inde autem observare licet, quòd sub angulo minore *BAL* obtinetur (in hypothesi anguli acuti) commune *LK* perpendiculum, remotius quidem ab illa basi *AB*, prout constat ex ipsa constructione, sed rursum minus altero viciniore communi perpendiculo *ND*, quod obtinetur sub angulo majore *BAN*. Ratio hujus posterioris est,

quia

quia in quadrilatero *LKDS* angulus ad punctum *S* acutus est in prædicta hypothesi, cum reliqui tres supponantur recti. Quare (ex Cor. I. post 3. hujus) latus *LK* minus erit contraposito latere *SD*, & sic multò minus latere *ND*.

PROPOSITIO XXXI.

Jam dico nullum fore prædictorum in duobus distinctis punctis communium perpendiculorum limitem determinatum, quo minùs sub minore, ac minore acuto angulo, ad illud punctum A *constituto, deveniri semper possit (juxta hypothesin anguli acuti) ad tale commune in duobus distinctis punctis perpendiculum, quod sit minus qualibet assignatâ longitudine* R.

Demonstratur. Quatenus enim aliter res se habeat; si ex puncto *K* (recole fig. 30.) in quantalibet à puncto *B* distantiâ in ea *BX* assignato, educatur perpendicularis *KL*, ad quam ex puncto *A* (juxta 12. primi) demissa intelligatur perpendicularis *AL*, deberet ipsa *KL* major esse eâ longitudine *R*. Ratio autem est; quia assumpto in eadem *BX* altiore puncto *Q*, ex quo educatur ad ipsam *BX* perpendicularis *QF*, ad quam (juxta eandem 12. primi) demittatur perpendicularis *AF*, deberet hæc rursum saltem non esse minor eâ longitudine *R*. Erit autem *KL* (ex Cor. præced. Prop.) major ipsâ *QF*. Igitur ea *KL* major foret prædictâ longitudine *R*. Atque ita semper altiùs procedendo. Tab. III.

Jam verò: si illa quantacunque *KB* divisa intelligatur (prout in XXV. hujus) in portiones *KK*, æquales illi longitudini *R*, educanturque ex illis punctis *K* perpendiculares, quæ occurrant ipsi *AX* in punctis *H, D, M*; non erunt anguli ad hæc puncta, versùs partes puncti *L*, aut recti, aut obtusi; ne in aliquo quadrilatero, ut putà *KM-*

LK quatuor simul anguli æquales sint; aut majores quatuor rectis, contra hypotesim anguli acuti, juxta quam procedimus. Omnes igitur hujusmodi anguli acuti erunt versus partes puncti *L*; ac propterea omnes itidem ad illa puncta obtusi versus partes puncti *A*. Quare (ex Cor. I. post 5. hujus) prædictarum perpendicularium minima quidem erit *KL* remotior à basi *AB*, maxima *KM* propinquior eidem basi; reliquarum verò propinquior remotiore semper major erit. Igitur (ex meâ præced. 24. ejusque Coroll.) quatuor simul anguli quadrilateri *KHLK* remotioris à basi *AB* majores erunt quatuor simul angulis reliquorum omnium quadrilaterorum eidem basi proximiorum. Quare (prout in XXV. hujus) destructa maneret hypothesis anguli acuti.

Itaq; constat nullum fore prædictorum in duobus distinctis punctis communium perpendiculorum limitem determinatum, quo minùs sub minore, ac minore acuto angulo, ad illud punctum *A* constituto, deveniri semper possit (juxta hypothesin anguli acuti) ad tale commune in duobus distinctis punctis perpendiculum, quod sit minus qualibet assignatâ longitudine *R*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXII.

Jam dico unum aliquem fore (in hypothesi anguli acuti) determinatum acutum angulum BAX, *sub quo educta* AX *(fig. 33.) non nisi ad infinitam distantiam incidat in eam*
Tab. IV. BX, *ac propterea sit ipsa limes partim intrinsecus, partim extrinsecus; tum earum omnium, quæ sub minoribus acutis angulis ad finitam distantiam incidunt in prædictam* BX; *tum etiam aliarum, quæ sub majoribus angulis acutis, usque ad angulum rectum inclusivè, commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendiculum cum eadem* BX.

De-

Demonſtratur. Nam primò conſtat (ex Cor. II. poſt XXIX. hujus) nullum fore determinatum acutum angulum, omnium maximum, ſub quo educta ex illo puncto *A* ad finitam diſtantiam occurrat prædictæ *BX*. Secundò conſtat nullum itidem eſſe (in hypotheſi anguli acuti) acutum angulum omnium minimum, ſub quo educta commune habeat in duobus diſtinctis punctis perpendiculum cum illa *BX*; quandoquidem (ex præcedente) nullus eſſe poteſt limes determinatus, quo minùs ſub minore acuto angulo ad illud punctum *A* conſtituto deveniri poſſit ad tale commune in duobus diſtinctis punctis perpendiculum, quod ſit minus qualibet aſſignabili longitudine *R*.

Atque hinc tertiò conſequitur unum aliquem (in ea hypotheſi) eſſe debere determinatum acutum angulum *BAX*, ſub quo educta *AX* ita ſemper magis accedat ad eam *BX*, ut non niſi ad infinitam diſtantiam in eandem incidat.

Porrò autem hanc ipſam *AX* fore limitem partim intrinſecum, partim extrinſecum utriuſque prædictarum rectarum claſſis, ſic demonſtratur. Nam primò conveniet cum illis rectis, quæ ad finitam diſtantiam occurrunt ipſi *BX*, cum ipſa etiam aliquando conveniat; diſcrepabit autem, quia ipſa non niſi ad infinitam diſtantiam. Secundò autem conveniet etiam, & ſimul diſcrepabit ab illis rectis, quæ commune obtinent in duobus diſtinctis punctis perpendiculum cum illâ *BX*; quia ipſa etiam commune obtinet perpendiculum cum eadem *BX*; ſed in uno eodemque puncto *X* infinitè diſſito. Hoc autem poſtremum cenſeri debet demonſtratum in XXVIII. hujus, prout moneo in ejuſdem Corollario.

Itaque conſtat unum aliquem fore (in hypotheſi anguli acuti) determinatum acutum angulum *BAX*, ſub quo educta *AX* non niſi ad infinitam diſtantiam incidat in

eam

eam BX, ac propterea fit ipsa limes partim intrinsecus, partim extrinsecus; tum earum omnium, quæ sub minoribus acutis angulis ad finitam distantiam incidunt in prædictam BX; tum etiam aliarum, quæ sub majoribus angulis acutis, usque ad angulum rectum inclusivè, commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendiculum cum eadem BX. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIII.

Hypothesis anguli acuti est absolutè falsa; quia repugnans naturæ lineæ rectæ.

Demonstratur. Ex præmissis Theorematis constare potest eò tandem perducere Geometriæ Euclideæ inimicam hypothesin anguli acuti, ut agnoscere debeamus duas in eodem plano existentes rectas AX, BX, quæ in infinitum protractæ versùs eas partes punctorum X in unam tandem eandemque rectam lineam coire debeant, nimirum recipiendo, in uno eodemque infinitè dissito puncto X, commune in eodem cum ipsis plano perpendiculum. Quoniam verò de primis ipsis principiis agendum mihi hìc est, diligenter curabo, ut nihil omittam quasi nimis scrupulosè objectum, quod quidem exactissimæ demonstrationi opportunum esse cognoscam.

LEMMA I.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Definit Euclides lineam rectam, quæ *ex æquo sua interjacet puncta*. Esto igitur (fig. 37.) linea quædam AX, quæ ex puncto A per sua quælibet intermedia puncta continuativè excurrat usque ad punctum X. Non dicetur

cetur hæc linea recta, si talis ipsa fuerit, ut circa duo illa immota extrema sua puncta possit ipsa in alteram partem converti, ut putà a læva parte in dexteram: Non dicetur, inquam, linea recta; quia non jacebit ex æquo inter sua designata extrema puncta; quandoquidem vel in lævam partem declinabit, ubi ex puncto *A* excurrit ad punctum *X* per quædam intermedia puncta *B*; vel declinabit in dexteram, ubi ex eodem immoto puncto *A* excurrit ad idem immotum punctum *X* per quædam intermedia puncta *C*, quæ alia planè sunt a prædictis punctis *B*. Scilicet illa sola linea *AX* dici poterit recta, quæ excurrat ex puncto *A* ad punctum *X* per talia intermedia puncta *D*, quæ ipsa, prout sic invicem continuata, revolvi nequeant, circa illa immota extrema puncta *A*, & *X*, ad novum & novum occupandum situm.

In hac autem rectæ lineæ idea manifestè continetur proposita veritas, duas nempe rectas lineas spatium non comprehendere. Si enim duæ exhibeantur lineæ claudentes spatium, quarum nempe communia sint extrema duo puncta *A*, & *X*, facilè ostenditur vel neutram, vel unam tantùm illarum linearum esse rectam. Neutra erit recta, ut putà *ABBX*, & *ACCX*, si circa duo extrema immota puncta *A*, & *X*, ita revolvi posse intelligantur ipsæ *ABBX*, *ACCX*, ut reliqua ipsarum intermedia puncta ad novum, & novum occupandum locum pertranseant. Una tantùm erit recta; ut putà *ADDX*, si circa illa immota extrema puncta ita revolvi intelligantur ipsæ *ABBX*, *ACCX*, quæ hinc inde cum illa *ADDX* spatium claudunt, ut ipsarum quidem *ABBX*, *ACCX* puncta intermedia ad novum, & novum occupandum locum pertranseant, ipsius verò *ADDX* puncta omnia etiam intermedia in eodem loco persistant. Non igitur fieri potest, ut duæ juxta præmissam intelligentiam rectæ lineæ, spatium comprehendant. Quod erat propositum.

CO-

COROLLARIUM I.

HInc porrò ſequitur admitti oportere poſtulatum illud Euclidæum: quòd *à dato puncto ad quodlibet aſſignatum punctum rectam lineam ducere liceat*. Nam clarè intelligitur, duas ſemper ſine ullo certo limite duci poſſe lineas, prædictis punctis *A*, & *X* terminatas, quæ propiores invicem fiant, minuſque idcirco ſpatium comprehendant, dum ſcilicet una quidem ducatur ad lævam partem, & altera uniformis ad dexteram, ſive una ſurſum, & altera deorſum; duci, inquam, poſſe lineas ejuſmodi ſemper invicem ſine ullo certo limite propiores, quæ utique omnino uniformes inter ſe ſint, ſibique invicem idcirco ſuccedant, dum circa immota extrema puncta *A*, & *X*, revolvi ipſæ intelligantur. Inde autem clarè itidem intelligitur, ſequi tandem debere (in ſemper majore harum uniformium linearum, unius ad alteram acceſſu) coitionem in unam, eandemque lineam *ADX*, quæ circa immota extrema illa puncta revolvi nequeat ad occupandum novum locum. Et hæc erit linea recta poſtulata.

Ubi rurſum conſtat unicam eſſe, quæ à dato puncto ad quodlibet alterum aſſignatum punctum poteſt duci linea recta.

COROLLARIUM II.

PRæterea ſequitur uniformem eſſe debere intelligentiam alterius Euclideæ definitionis, in qua dicit planam ſuperficiem eſſe, *quæ ex æquo ſuas interjacet lineas*. Si enim ſuperficies clauſa prædictis lineis unâ *ABX* rectâ, & alterâ *ABBX* (ſive hæc ſit unica, aut multiplex linea curva, ſive ſit compoſita ex duabus, aut pluribus lineis rectis, ut putà *AB*, *BB*, *BX*) ſi, inquam, ſuperficies ejuſ-

ejusmodi revolvi intelligantur circa immotam rectam *ADX*, usque dum ipsa linea *ABX* perveniat ad congruendum lineæ *ACX*, in parte adversâ locatæ, quæ utique ad omnimodam æqualitatem, & similis omnino sit ipsi *ABX*, & rursum cum eadem rectâ *ABX* claudat (versùs eandem sive supernam, sive infernam partem) superficiem omnino æqualem, & similem antedictæ: alterutrum sanè continget; vel ita ut una superficies alteri adamussim congruat; vel ita ut intra duas illas superficies claudatur spatium trinæ dimensionis. Et primum quidem si contingat, dicetur superficies plana; sin verò contingat secundum, non dicetur superficies plana; quia tunc aliæ intermediæ intelligi poterunt inter easdem extremas lineas interpositæ superficies invicem æquales, ac similes, quæ semper magis ad se invicem sine ullo certo limite accedant, ac propterea usque ad excludendum omne spatium intermedium. Tunc autem utraque illa superficies dicetur plana, quia verè jacebit ex æquo inter suas extremas lineas, sine ullo ascensu, aut descensu in partes adversas.

LEMMA II.

Duæ lineæ rectæ non possunt habere unum & idem segmentum commune.

Demonstratur. Si enim fieri potest; unum & idem segmentum *AX* commune sit (fig. 38.) duabus rectis, per punctum *X* in eodem plano continuatis *AXB*, & *AXC*. Tum centro *X*, & intervallo *XB*, sive *XC*, describatur arcus *BMC*, ad cujus quodlibet punctum *M* jungatur ex puncto *X* recta *XM*.

Dico primò, lineam *AXM* fore & ipsam, in facta hy-

po-

pothesi, lineam rectam, ex puncto *A* per punctum *X* continuatam. Si enim linea ejusmodi recta non sit, duci poterit (ex Cor. I. praecedentis Lemmatis) alia quaedam linea *AM*, quae ipsa sit recta. Haec autem vel secabit in aliquo puncto *K* alterutram ipsarum *XB*, *XC*; vel earundem alterutram, ut putà eam *XB* claudet intra spatium comprehensum ipsis *AX*, *XM*, & *APLM*. At horum prius manifestè repugnat praecedenti Lemmati; quia sic duae suppositae rectae lineae, una *AXK*, & altera *ATK*, spatium clauderent. Posterius autem uniformis absurdi statim convincitur.

Nam constat rectam *XB*, si per *B* ulteriùs protrahatur, occursuram tandem in aliquo puncto *L* ipsi *APLM*; unde rursum duae suppositae rectae, una *AXBL*, & altera *APL*, spatium claudent. Porrò uniforme sequitur absurdum, si fingamus, quòd recta *XB*, ulteriùs protracta per *B*, occurrat tandem in quovis alio puncto aut rectae *XM*, aut rectae *XA*.

Ex istis autem evidenter consequitur lineam *AXM* fore ipsam, in facta hypothesi, lineam rectam ex puncto *A* ad punctum *M* deductam. Quod erat propositum.

Dico secundò, eam suppositam rectam *AXB* (quatenus quidem intelligatur conservare suam illam qualemcunque continuationem ex puncto *A* per *X* versùs *B*) non posse recipere duplicem aliam in eodem plano positionem, in quarum utrâque portio quidem *AX* in eodem situ persistat, portio verò altera *XB* in una illarum duarum positionum congruat (exempli causâ) ipsi *XC*, & in alia positione congruat ipsi *XM*.

Scilicet non hìc renuo, quin portio *XB*, si intelligatur moveri in illo suo plano circa punctum *X*, adeò ut successivè adamussim congruat (ex praecedente Lemmate) non modò ipsis *XM*, *XC*, verùm etiam adamussim con-

gruat

gruat infinitis aliis rectis; quæ ex puncto X duci possunt ad reliqua intermedia puncta arcus BC: Non, inquam, hìc renuo, quin illa XB in qualibet illarum positionum considerari debeat tanquam continuatio in rectum ipsius immotæ AX; cum magis circa eam AXM jam demonstraverim id secuturum in facta hypothesi illius communis segmenti: Unicè igitur hìc assero, in una tantùm novarum illarum positionum, ut putà dum congruit ipsi XC, retineri ab ea posse illam eandem qualemcunque continuationem, quam obtinet in prima positione, ubi ex puncto A per X procedit versùs punctum B.

Et istud quidem sic demonstratur. Nam primò constat continuationem illam AXB nequire esse omnino similem, aut æqualem continuationi AXC, si utraque consideretur versùs eandem seu lævam, seu dexteram partem; quia cæterùm in ea tali positione deberent invicem congruere ipsæ AXB, AXC; quod est contra hypothesim communis illius segmenti AX: Deberent, inquam, congruere; dum scilicet, relatè ad eam immotam AX, æquè similiter in eandem seu lævam, seu dexteram partem convergerent in eo tali plano illæ continuatæ XB, & XC. Secundò constat nihil vetare, quin prædicta continuatio AXB, considerata versùs unam partem, ut putà, ad lævam, similis planè sit, aut æqualis continuationi AXC, consideratæ versùs partem adversam, ut putà, ad dexteram, adeò ut propterea, sine ulla immutatione in ipsa AXB, locari hæc possit ad congruendum in eodem plano alteri AXC. At manifestè repugnat, quòd rursum, sine ulla immutatione illius suæ continuationis, locari ea possit in eodem plano ad congruendum alteri AXM, quæ nimirum dividat in X illum qualemcunque angulum BXC. Quòd enim continuatio AXB alia planè sita continuatione AXM, si utraque consideretur versùs eandem seu læ-

 vam,

vam, seu dexteram partem; ex eo manifestum esse debet; quia cæterùm (ut in simili observatum jam est) in ea tali positione deberent invicem congruere ipsæ *AXB*, *AXM*. Sed neque sustineri potest, quòd continuatio *AXB* versùs unam partem, ut putà ad lævam, similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs partem adversam, ut putà ad dexteram; quia cæterùm continuatio *AXM* versùs dexteram similis planè foret, aut æqualis continuationi *AXC* versùs eandem dexteram partem, propter suppositam omnimodam similitudinem, aut æqualitatem inter modò dictam continuationem, & illam aliam *AXB* versùs lævam. Tunc autem in ea tali positione (ut est prædictum) deberent invicem congruere ipsæ *AXM*, *AXC*; quod est contra præsentem hypothesim.

Ex quibus omnibus infero: eam suppositam rectam *AXB* (quatenus quidem intelligatur conservare suam illam qualemcunque continuationem ex puncto *A* versùs *B*) recipere non posse duplicem aliam in eodem plano positionem, in quarum utrâque portio quidem *AX* in eodem situ persistat, portio verò altera *XB* in una illarum duarum positionum congruat (exempli causâ) ipsi *XC*, & in alia positione congruat ipsi *XM*. Quod erat propositum.

Dico tertiò: eandem suppositam rectam *AXB* non aliâ ratione conservare posse suam illam qualemcunque continuationem, dum ejusdem portio *XB* intelligitur transferri per nova, & nova loca usque ad congruendum in illo quodam plano ipsi *XC*, persistente interim in eodem suo loco portione *AX*; non posse, inquam, conservare suam illam qualemcunque continuationem, nisi quatenus portio ipsa *XB* intelligatur ascendere, aut descendere ad existendum cum illa immota *AX* in novis, & novis planis, usque dum redeat ad antiquum planum, congruens ibi prædictæ *XC*.

Id enim censeri potest jam demonstratum; quia scilicet nulla alia in eodem illo plano reperiri potest positio, juxta quam ipsa *AXB* (persistente portione *AX* in suo eodem loco) conservet suam illam qualemcunque continuationem, præterquam ubi deveniat ad congruendum prædictæ *AXC*.

Dico quartò: designari posse in eo arcu *BC* tale punctum *D*, ad quod si jungatur *XD*, jam ipsa *AXD* non modò recta linea sit, sed rursum ita se habeat, ut continuatio *AXD*, considerata versùs lævam, æqualis planè sit, aut similis eidem continuationi consideratæ versùs dexteram.

Demonstratur. Et prior quidem pars (qualecunque sit illud punctum *D* in arcu *BC* designatum) eo modo ostenditur, quo supra usi sumus circa continuatam *AXM*. Posterior verò pars ita evincitur. Nam hìc supponimus duas rectas *AXB*, *AXC*, sub eodem communi segmento *AX*. Præterea supponimus continuationem *AXB* versùs lævam non esse omnino similem, aut æqualem eidemmet continuationi versùs dexteram; quia stante omnimodà ejusmodi similitudine, aut æqualitate, facilè ostenditur nulli alteri rectæ lineæ commune esse posse illud segmentum *AX*, prout nempe sic demonstrabimus de illa continuata *AXD*. Tandem consequenter supponimus continuatam illam *AXB* ita locari posse in eodem plano, ut sub eodem immoto segmento *AX* congruat cuidam alteri *AXC*, in qua nimirum continuatio ipsa *AXC* versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXB* versùs lævam, ac rursum continuatio *AXC* versùs lævam similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXB* versùs dexteram.

His stantibus: si ad quodvis punctum *M* sumptum in eo arcu *BC* jungatur *XM*; vel continuatio *AXM* erit

sibi

sibi ipsa planè uniformis relatè ad lævam, ac dexteram partem ipsius *AX*; vel non. Si primum; demonstrabo de ista *AXM*, quod statim demonstraturus sum de illa continuata *AXD*. Si secundum, ergo prædicta *AXM* ita rursum locari poterit in eodem plano, ut sub eodem immoto segmento *AX* congruat cuidam alteri *AXF*, in qua nimirum continuatio ipsa *AXF* versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs lævam, ac rursum continuatio *AXF* versùs lævam similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs dexteram. Porrò, cum punctum *M* supponi possit vicinius puncto *B*, quàm punctum *C*, non cadet punctum *F* in ipsum punctum *C*; quia sic continuatio *AXM* versùs lævam similis planè foret, aut æqualis continuationi *AXF*, sive *AXC* versùs dexteram, ac propterea similis planè, aut æqualis continuationi *AXB* versùs lævam, quod est absurdum, cum illæ duæ *XM*, *XB* non sibi invicem congruant in sua tali positione. Sed neque etiam existet punctum *F* ultra punctum *C* in eo arcu *BC* ulteriùs producto; quia sic uniformi ratiocinio ostendetur, contra hypothesim, quòd etiam punctum *M* deberet existere in eo arcu *CB* ulteriùs producto, adeo ut nimirum ipsa *XM* divideret versùs lævam eum qualemcunque angulum *AXB*, prout *XF* poneretur dividere versùs dexteram eum qualemcunque angulum *AXC*: Deberet, inquam, sic existere, ad eum utique finem, ut ea *AXM* sub eodem immoto segmento *AX* locari rursum possit in eodem plano ad congruendum illi alteri *AXF*, in qua nimirum continuatio ipsa *AXF* versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs lævam, ac rursum continuatio *AXF* versùs lævam similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs dexteram.

Quoniam verò arcus *BC* major est ejusdem portione

MF

MF, designarique uniformiter possunt in ea portione *MF* alia duo puncta cum minore, sine ullo certo termino, intercapedine; alterutrum sanè in hac prædictorum punctorum approximatione contingere debet. Unum est, si tandem incidatur in unum idemque intermedium punctum *D*, ad quod si jungatur *XD*, talis habeatur continuatio *AXD*, cui soli conveniat (factâ comparatione inter lævam, ac dexteram partem) esse sibi ipsi omnino similem, aut æqualem. Alterum est, si duo talia inveniantur distincta puncta *M*, & *F*, ad quæ junctæ *XM*, & *XF*, duas exhibeant continuationes, unam *AXM*, & alteram *AXF*, quarum utraque sit sibi ipsi, modo jam explicato, omnino similis, aut æqualis. Hoc autem secundum impossibile esse sic demonstro. Nam ex ipsis terminis constare potest, quòd recta linea, ex puncto *A* per *X* ulteriùs producta, unicam tantùm sortiri potest in eo tali plano positionem, dum scilicet quædam superaddita *XF* æquè omnino se habeat in lævam, & in dexteram partem præsuppositæ *AX*, seu non magis in lævam, quàm in dexteram ejusdem partem convergat. Non ergo alia erit continuatio *AXM*, quæ rursum æquè omnino se habeat in lævam, & in dexteram partem ejusdem *AX*. Scilicet constat subsistere simul non posse; & quòd continuatio *AXF* versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis sibi ipsi consideratæ versùs lævam; & quòd alia quædam continuatio *AXM* versùs lævam (quæ, ex ipsa positione, minor sit continuatione *AXF* versùs eandem lævam) æqualis iterum sit eidem continuationi versùs dexteram, quæ certè, ex ipsa rursum positione, major est prædictâ continuatione *AXF* versùs eandem dexteram.

Non ergo in eo arcu *BC* duo talia inveniri possunt puncta *M*, & *F*, ad quæ junctæ *XM*, & *XF*, duas exhibeant continuationes, unam *AXM*, & alteram *AXF*, quarum

rum utraque sit sibi ipsi, modo jam explicato; omnino similis, aut æqualis. Unde tandem consequitur incidi aliquando debere in unum, idemque punctum *D*, ad quod juncta *XD* talem exhibeat continuationem *AXD*, cui soli conveniat (factâ comparatione inter lævam, ac dexteram partem) esse sibi ipsi omnino similem, aut æqualem. Quod erat hoc loco demonstrandum.

Dico tandem quintò: eam solam *AXD* fore lineam *rectam*, nimirum ex *A* per *X directè* continuatam in *D*. Quamvis enim ly *ex æquo*, in definitione lineæ rectæ, applicari primitùs debeat punctis intermediis relatè ad puncta ipsius extrema; unde utique jam elicuimus, *duas lineas rectas non claudere spatium*; intelligi tamen etiam debet de ejusdem rectæ lineæ continuatione *in directum*. Itaque ea sola *XD* (in eodem cum *AX* plano existens) dicetur esse continuatio *recta*, sive *in rectum* prædictæ *AX*, quando ipsa neque in lævam, neque in dexteram illius partem convergat, sed utrinque *ex æquo* procedat; adeo ut nempe continuatio illa *AXD* versùs lævam similis planè sit, aut æqualis eidem continuationi consideratæ versùs dexteram. Inde enim fiet, ut illi soli *AXD* conveniat non posse ab ea suscipi in eo tali plano aliam positionem sub illa immota *AX*; cum certè (ex jam demonstratis) illæ aliæ *AXB*, & *AXM*, citra omnem suarum talium continuationum immutationem, suscipere possint sub eadem immota *AX* alias in eodem plano positiones, quales sunt ipsarum *AXC*, & *AXF*. Igitur illa sola *AXD*, cujus nempe continuatio *XD* tum in eodem cum ipsa *AX* plano existat, tum etiam æquè omnino se habeat in lævam, ac dexteram partem prædictæ *AX*, erit linea *recta* juxta explicatam definitionem, seu continuatio *in rectum* ejusdem præsuppositæ rectæ *AX*.

Ex quibus omnibus tandem constat evenire non posse, ut unum quodpiam sit commune segmentum duarum

recta-

rectarum. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

EX duobus præmissis Lemmatis tria opportunè subnotare licet. Unum est: duas rectas, neque sub infinitè parvâ inter ipsas distantiâ, claudere spatium posse. Ratio est, quia (prout in primo Lemmate) vel utraque illarum sub duobus *illis* communibus extremis punctis immotis revolvi posset ad novum situm occupandum, & sic (ex jam tradita lineæ rectæ definitione) neutra foret linea recta: vel una tantum in suo eodem situ persisteret, & sic illa sola recta linea foret. Quod autem nequeat utraque in eodem ipso situ persistere, dum aliquod concludant spatium, etiamsi infinitè parvum, manifestum fiet consideranti posse faciem illius plani, in quo illæ duæ consistunt, converti de superna in infernam, manentibus cæteroquin in suo eodem loco duobus illis extremis punctis.

Alterum est: neque item ullam lineam rectam, in quantalibet ejusdem productione in directum, diffindi posse in duas, quamvis sub infinitè parva intercapedine. Ratio est; quia (prout in præcedente Lemmate) continuatio in directum præsuppositæ cujusdam simplicis rectæ AX non alia esse intelligitur præter unam XD, quæ *ex æquo* utrinque procedat relatè ad lævam, ac dexteram partem prædictæ AX; ex quo utique fiat, ut sub ea immota AX non aliam ipsa immutata habere possit in eo plano positionem. Quòd autem in eodem plano alia quædam ad lævam decerni possit XM, infinitè parum dissiliens ab ipsa XD, nihil suffragatur. Nam rursum alia item ad dexteram designari poterit XF, quæ uniformiter infinitè parum dissiliat ab eadem XD. Quare (prout in præcitato Lemmate) illa sola *AXD* erit linea recta a nobis definita.

Tertium tandem est: in hoc ipso secundo Lemmate censeri posse immediatè demonstratam 4. undecimi; quòd nempe ejusdem rectæ nequeat pars una quidem in subjecto plano existere, & altera in sublimi.

LEMMA III.

Si duæ rectæ AB, CXD *sibi invicem occurrant (fig. 39.) in aliquo ipsarum intermedio puncto* X, *non ibi se invicem contingent, sed una alteram ibidem secabit.*

DEmonstratur. Si enim fieri potest, tota *CXD* ad unam eandemque partem ipsius *AB* consistat. Jungatur *AC*. Non erit porrò *AC* eadem cum ipsâ veluti continuatâ *AXC*; quia cæterùm (contra præcedens Lemma) duarum rectarum, unius *AXC*, & alterius præsuppositæ *DXC*, unum idemque foret commune segmentum *XC*. Itaque jungatur *BC*. Non erit rursum hæc *BC* continuatio ipsius *BA* usque in punctum *C*; ne duæ rectæ, una *XAC*, portio ipsius *BAC*, & altera *XC* spatium claudant, contra præmissum Lemma primum. Igitur ea *BC* vel secabit in aliquo puncto *L* ipsam *XD*, sive præsuppositam rectam *DXC*; & tunc rursum duæ rectæ lineæ, una *LC* portio ipsius *BC*, & altera *LXC* portio prædictæ *DXC*, spatium claudent; vel alterutrum extremum punctum sive *A* ipsius *BA*, sive *D* ipsius *CXD*, claudetur intra spatium comprehensum ipsis *CX*, *XB*, & alterutrâ vel *BFC*, vel *BHC*. At in utroque casu idem absurdum consequitur: Sive enim *BA* protracta per *A* occurrat ipsi *BFC* in aliquo puncto *F*; sive *CXD* protracta per *D* occurrat ipsi *BHC* in aliquo puncto *H*: in idem semper absurdum incidimus, quòd duæ rectæ spatium claudant; nimirum aut

Tab. IV.

recta

recta BF portio ipsius BFC unà cum altera BAF; aut recta HC, portio ipsius BHC, unà cum altera præsupposita recta continuata $CXDH$.

Porrò idem, aut majus absurdum consequitur, si illa BA protracta per A occurrat in aliquo puncto vel ipsi CX, vel sibi ipsi in aliquo puncto suæ portionis XB. Atque id similiter valet, si altera CXD protracta per D occurrat in aliquo puncto vel ipsi XB, vel sibi ipsi in aliquo puncto suæ portionis CX.

Itaque constat, quòd duæ rectæ AB, CXD sibi invicem occurrentes in aliquo ipsarum intermedio puncto X, non ibi se invicem contingent, sed una alteram ibidem secabit. Quod erat &c.

LEMMA IV.

Omnis diameter dividit bifariam suum circulum, ejusque circumferentiam.

Demonstratur. Esto circulus (recole fig. 23.) $MDHNKM$, cujus centrum A, & diameter MN. Intelligatur illius circuli portio $MNKM$ ita revolvi circa immota puncta M, & N, ut tandem accommodetur, seu coaptetur reliquæ portioni $MNHDM$. Constat primò totam diametrum MAN quoad omnia ipsius puncta in eodem situ esse mansuram: ne duæ rectæ lineæ (contra præcedens Lemma primum) spatium claudant. Constat secundò nullum punctum K circumferentiæ NKM casurum vel intra, vel extra superficiem clausam diametro MAN, & alterâ circumferentiâ $NHDM$; ne scilicet contra naturam circuli, unus radius v.g. AK minor sit, aut major altero ejusdem circuli radio v.g. AH. Constat tertiò quemlibet radium MA continuari unicè posse in rectum per Tab. II.

 alte-

alterum quendam radium *AN*, ne (contra præcedens Lemma secundum) duæ suppositæ rectæ lineæ, ut putà *MAN*, *MAH*, unum idemque commune habeant segmentum *MA*. Constat quartò (ex proximè antecedente Lemmate) omnes cujusvis circuli diametros se invicem in centro secare, & ex notâ naturâ circuli bifariam.

Ex quibus omnibus constare potest, quòd diameter *MAN* tum dividit exactissimè suum circulum, ejusque circumferentiam in duas æquales partes, tum etiam assumi universim potest pro qualibet ejusdem circuli diametro. Quod erat &c.

SCHOLION.

HAnc eandem veritatem demonstratam leges apud Clavium a Thalete Milesio, sed fortasse non exhaustâ omni qualibet objectione.

LEMMA V.

Inter angulos rectilineos omnes anguli recti sunt invicem exactissimè æquales, sine ullo defectu etiam infinitè parvo.

DEmonstratur. Angulum inter rectilineos rectum definit Euclides: *qui est æqualis suo deinceps*. Non hunc
Tab. IV. postulat ipse sibi concedi, sed problematicè demonstrat in sua Prop. XI. Libri primi. Ibi enim ex dato in recta *B C* quolibet puncto *A* (fig. 40.) docet excitare perpendicularem *AD*, ad quam anguli *DAB*, *DAC* sint invicem æquales. Porrò illos duos angulos esse invicem exactissimè æquales, sine ullo defectu etiam infinitè parvo, constare potest ex Corollario post duo priora præmissa Lemmata;

si

si nempe ipsæ *AB*, *AC* designatæ sint exactissimæ æquales.

Sed aliqua oriri potest dubitatio, si duo alii ad quandam alteram *FM* recti anguli *LHF*, *LHM* (fig. 41.) conferantur cum prædictis rectis angulis *DAB*, *DAC*. Itaque *HL* æqualis sit ipsi *AD*, ac rursum posterior integra Figura ita intelligatur superponi priori, ut punctum *H* cadat super punctum *A*, & punctum *L* super punctum *D*. Jam sic progredior. Et primò quidem (ex præcedente Lemmate) ipsa *FHM* non præcisè continget alteram *BC* in eo puncto *A*. Ergo vel adamussim procurret super illa *BC*, vel eandem ita secabit, ut unum ejus punctum extremum v. g. *F* cadat suprà, & alterum *M* deorsum. Si primum: jam clarè habemus exactissimam inter omnes rectilineos angulos rectos æqualitatem intentam. At non secundum; quia sic angulus *LHF*, hoc est *DAF*, minor foret angulo *DAB*, ejusque supposito exactissimè æquali *DAC*, & sic multò minor angulo *DAM*, sive *LHM*; contra hypothesin. Deinde verò nihil suffragatur, quòd angulus *DAF* infinitè parùm deficiat ab angulo *DAB*, sive ejus exactissimè æquali *DAC*, qui rursum solùm infinitè parum superetur ab angulo *DAM*. Nam semper angulus *DAF*, sive *LHF*, non erit exactissimè æqualis angulo *DAM*, sive *LHM*, contra hypothesin.

Itaque constat omnes rectilineos angulos rectos esse invicem exactissimè æquales, sine ullo defectu etiam infinitè parvo. Quod &c.

COROLLARIUM.

INde autem fit, ut quæ ex uno dato cujusvis rectæ lineæ puncto perpendiculariter in aliquo plano ad eandem educitur, ipsa sit in eo tali plano unica exactissimè linea recta, nec potens diffindi in duas.

Post

Post quinque præmissa Lemmata, eorumque Corollaria, progredi jam debeo ad demonstrandum principale assumptum contra hypothesin anguli acuti.

UBi statuere possum, tanquam per se notum, non minùs repugnare, quòd duæ rectæ lineæ (sive ad finitam, sive ad infinitam earundem productionem) in unam tandem, eandemque rectam lineam coeant; quàm quòd una eademque linea recta (sive ad finitam, sive ad infinitam ejusdem continuationem) in duas rectas lineas diffindatur, contra præcedens Lemma secundum, ejusque Corollarium. Quoniam ergo naturæ lineæ rectæ (ex præcedente Corol. proximi Lemmatis) oppositum itidem est, quòd duæ rectæ lineæ ad unum, idemque punctum cujusdam tertiæ rectæ, perpendiculares ipsi sint in eodem communi plano; agnoscere oportet tanquam absolutè falsam, quia repugnantem naturæ prædictæ, hypothesin anguli acuti, juxta quam duæ illæ *AX*, *BX* (fig. 33.) in uno eodemque communi puncto *X* perpendiculares esse deberent cuidam tertiæ rectæ, quæ in eodem cum ipsis plano existeret. Hoc autem erat principale demonstrandum.

SCHOLION.

ATque hìc subsistere tutus possem. Sed nullum non movere lapidem volo, ut inimicam anguli acuti hypothesim, a primis usque radicibus revulsam, sibi ipsi repugnantem ostendam. Iste autem erit consequentium hujus Libri Theorematum unicus scopus.

LIBRI PRIMI
PARS ALTERA.
In qua idem Pronunciatum Euclidæum contra hypothesin anguli acuti redargutivè demonstratur.

PROPOSITIO XXXIV.

In qua expenditur curva quædam enascens ex hypothesi anguli acuti.

Recta *CD* jungat æqualia perpendicula *AC*, *BD* cuidam rectæ *AB* insistentia. Tum divisis bifariam in punctis *M*, & *H* (fig. 42.) ipsis *AB*, *CD*, jungatur *MH* (ex 2. hujus) utrique perpendicularis. Rursum in hac hypothesi supponuntur acuti anguli ad junctam *CD*. Quare in quadrilatero *AMHC* erit *MH* (ex Cor. I. post 3. hujus) minor ipsâ *AC*. Hinc autem; si in *MH* protractâ sumas *MK* æqualem ipsi *AC*; puncta *C*, *K*, *D* spectabunt ad curvam hìc expensam. Deinde anguli ad junctam *CK* erunt & ipsi (ex 7. hujus) acuti. Igitur juncta *LX*, quæ bifariam, atque ideo (ex 2. hujus) ad angulos rectos dividat ipsas *AM*, *CK*, erit similiter (ex Cor. I. post 3. hujus) minor eâdem *AC*. Quapropter; si in *LX* protractâ sumas *LF* æqualem ipsi *AC*, aut *MK*; etiam punctum *F* spectabit ad eam curvam. Præterea jungens *CF*, & *FK* invenies similiter duo alia puncta ad eandem curvam spectantia. Atque ita semper. Quod autem dico pro inveniendis punctis inter puncta *C*, & *K*, idem etiam uniformiter valet pro inveniendis punctis inter puncta *K*, & *D*, scilicet cur- Tab. V.

va

va *CKD*, enascens ex hypothesi anguli acuti; est linea jungens extremitates omnium æqualium perpendiculorum super eâdem basi versùs eandem partem erectorum, quæ utique venire possunt sub nomine rectarum ordinatim applicatarum; est, inquam, linea ejusmodi, quæ propter ipsam, ex qua nascitur, hypothesim anguli acuti, semper est cava versùs partes contrapositæ basis *AB*. Quod quidem hoc loco declarandum, ac demonstrandum a nobis erat.

PROPOSITIO XXXV.

SI *ex quolibet puncto* L *basis* AB *ordinatim applicetur ad eam curvam* CKD *recta* LF: *Dico rectam* NFX *perpendicularem ipsi* LF *cadere totam ex utraque parte debere versùs partes convexas ejusdem curvæ, atque ideo eam fore ejusdem curvæ tangentem.*

Demonstratur. Si enim fieri potest, cadat quoddam punctum *X* (fig. 43.) ipsius *NFX* intra cavitatem ejusdem curvæ. Demittatur ex puncto *X* ad basim *AB* perpendicularis *XP*, quæ protracta per *X* occurrat curvæ in quodam puncto *R*. Jam sic. In quadrilatero *LFXP* non erit angulus in puncto *X* aut rectus, aut obtusus: Cæterùm (ex 5. & 6. hujus) destrueretur præsens hypothesis anguli acuti. Ergo prædictus angulus erit acutus. Quare erit *PX* (ex Cor. I. post 3. hujus) & sic multò magis *PR* major ipsâ *LF*. Hoc autem absurdum est (ex præcedente) contra naturam istius curvæ. Itaque illa *NF* protracta cadere tota debet versùs partes convexas, atque ideo ipsa erit ejusdem curvæ tangens. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

SI recta quæpiam XF (*fig.* 44.) *acutum angulum efficiat cum quavis ordinatâ* LF, *non cadet punctum* X *extra cavitatem curvæ, nisi priùs ipsa* XF *in aliquo puncto* O *curvam secuerit.*

Demonstratur. Constat sumi posse in ipsa *XF* punctum quoddam *X* adeò vicinum ipsi puncto *F*, ut juncta *LX* priùs curvam secet in aliquo puncto *S*: cæterùm ipsa *XF* vel non cadet tota extra cavitatem curvæ, & sic habemus intentum; vel adeò non efficiet cum *FL* angulum acutum, ut magis censenda jam sit in unicam rectam cum altera *LF* coire. Itaque ex puncto *S* demittatur ad basim *AB* perpendicularis *SP*. Erit hæc (ex 34. hujus) æqualis ipsi *LF*. Est autem *SP* (ex 18. primi) minor ipsâ *LS*. Ergo etiam *LF* minor est eâdem *LS*, ac propterea multò minor ipsâ *LX*. Hinc in triangulo *LXF* acutus erit angulus in puncto *X*, quia minor (ex 18. primi) angulo *LFX* supposito acuto. Jam demittatur ad *FX* perpendicularis *LT*. Cadet hæc (propter 17. primi) ad partes utriusque anguli acuti. Quare punctum *T* jacebit inter puncta *X*, & *F*. Deinde ex puncto *T* demittatur ad basim *AB* perpendicularis *TQ*. Erit *LF* (propter angulum rectum in *T*) major ipsâ *LT*, & hæc (propter angulum rectum in *Q*) major alterâ *QT*. Igitur *LF* multò major erit ipsâ *QT*. Hinc autem; si in *QT* protractâ sumatur *QK* æqualis ipsi *LF*; punctum *K* (ex 34. hujus) ad præsentem curvam spectabit, cadetque idcirco punctum *T* intra cavitatem ejusdem curvæ. Non ergo recta *FT*, quæ secat duas rectas *QK*, & *LT* in *T*, promoveri potest ad secandam protractam *LS* in puncto *X*, constituto extra cavitatem præsentis curvæ, nisi priùs ipsa protracta *FT* secet in aliquo puncto *O* portionem ejusdem curvæ inter puncta *S*, & *K* conſtitutam. Hoc autem erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Atque hinc manifeſtè liquet, inter tangentem hujus curvæ, & ipſam curvam locari non poſſe quandam rectam, quæ tota ad hanc, vel illam tangentis partem extra curvæ cavitatem cadat; quandoquidem recta ſic locata efficere debet (ex præcedente) angulum acutum cum demiſſa ex puncto contactus ad contrapoſitam baſim perpendiculari.

PROPOSITIO XXXVII.

C*urva* CKD, *ex hypotheſi anguli acuti enaſcens*, *æqualis eſſe deberet contrapoſitæ baſi* AB.

Ante demonſtrationem præmitto ſequens axioma.

Si duæ lineæ bifariam dividantur, tum earum medietates, ac rurſum quadrantes bifariam, atque ita in infinitum uniformiter procedatur; certo argumento erit, duas iſtas lineas eſſe inter ſe æquales, quoties in iſta uniformi in infinitum diviſione comperiatur, ſeu demonſtretur, deveniri tandem debere ad duas illarum ſibi invicem reſpondentes partes, quas conſtet eſſe inter ſe æquales.

Jam demonſtratur propoſitum. Intelligantur erecta ex baſi *AB* ad eam curvam *CKD* (fig. 45.) quotvis perpendicula *NF*, *LF*, *PF*, *MK*, *TF*, *VF*, *IF*; ſintque æquales in ipſa baſi *AB* portiones *AN*, *NL*, *LP*, *PM*, *MT*, *TV*, *VI*, *IB*.

Conſtat primò angulum ipſius *AC* cum eâ curvâ æqualem fore ſingulis hinc inde ad puncta *F*, ſive ad punctum *K*, aut punctum *D*, prædictarum perpendicularium angulis cum eâdem curvâ. Si enim miſtum quadrilaterum

rum

rum *ANFC* superponi intelligatur misto quadrilatero *NLFF*, constitutâ basi *AN* super æquali basi *NL*, cadet *AC* super *NF*, & *NF* super *LF*, propter æquales angulos rectos ad puncta *A*, *N*, *L*. Deinde propter æqualitatem rectarum (ex 34. hujus) *AC*, *NF*, *LF*, cadet punctum *C* super punctum *F* ipsius *NF*, & hoc super alterum punctum *F* ipsius *LF*. Præterea curva *CF* congruet adamussim ipsi curvæ *FF*: si enim una illarum, ut *CF* introrsum, aut extrorsum cadat; sumpto quolibet puncto *Q* inter puncta *N*, & *L*, ductâque perpendiculari secante unam curvam in *X*, & alteram in *S*, æquales forent (ex notâ hujus curvæ naturâ) ipsæ *QX*, *QS*, quod est absurdum. Idem valebit, si in dicta superpositione maneat in suo situ recta *NF*, & recta *AC* cadat super *LF*. Rursum idem valebit, si idem quadrilaterum mistum *ANFC* utrovis modo superponi intelligatur cuivis reliquorum quadrilaterorum usque ad ipsum inclusivè postremum quadrilaterum *BDFI*. Itaque angulus ipsius *AC* cum eâ curvâ æqualis est singulis hinc inde ad puncta *F*, sive ad punctum *K*, aut punctum *D*, prædictarum perpendicularium angulis cum eadem curva.

Constat hinc secundò æquales adamussim inter se esse portiones ipsius curvæ ab istis perpendicularibus hinc inde abscissas.

Si ergo basis *AB* divisa sit bifariam in *M*, & medietas *AM* bifariam in *L*; tum quadrans *LM* bifariam in *P*; atque ita in infinitum, procedendo semper versùs partes puncti *M*; constabit tertiò, etiam curvam *CKD* bifariam dividi in *K* a perpendiculari *MK*, medietatem *CK* bifariam itidem dividi in *F* a perpendiculari *LF*, quadrantem *FK* bifariam in *F* a perpendiculari *PF*; atque ita in infinitum, procedendo semper uniformiter versùs partes ipsius puncti *K*.

Quoniam verò in istâ basis *AB* in infinitum divisione considerare possumus rem devenisse ad portionem ipsius *AB* infinitè parvam, quæ nempe exhibeatur per latitudinem infinitè parvam perpendicularis *MK*, constabit quartò (ex præmisso axiomate) æqualitas intenta totius basis *AB* cum totâ curvâ *CKD*, dum aliàs ostendam portionem infinitè parvam abscissam ex basi *AB* a perpendiculari *MK* æqualem esse adamussim portioni infinitè parvæ, quam eadem perpendicularis abscindit ex curva *CKD*. Et hoc quidem postremum sic demonstro.

Nam *RK* perpendicularis ipsi *KM* tanget (ex 35. hujus) curvam in *K*, atque ita eandem tanget in *K*, ut inter ipsam tangentem (ex Cor. post 35. hujus) & curvam, ex neutra parte locari possit recta, quæ ipsam curvam non secet. Igitur infinitesima *K*, spectans ad curvam, æqualis omnino erit infinitesimæ *K* spectanti ad tangentem. Constat autem infinitesimam *K* spectantem ad tangentem, nec majorem, nec minorem, sed omnino æqualem esse infinitesimæ *M* spectanti ad basim *AB*; quia nempe recta illa *MK* intelligi potest descripta ex fluxu semper ex æquo ejusdem puncti *M* usque ad eam summitatem *K*.

Quare (juxta præmissum axioma) curva *CKD*, ex hypothesi anguli acuti enascens, æqualis esse deberet contrapositæ basi *AB*. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION I.

SEd fortè minùs evidens cuipiam videbitur enunciata exactissima æqualitas inter illas infinitesimas *M*, & *K*. Quare ad avertendum hunc scrupulum sic rursum procedo. Cuidam rectæ *AB* insistant ad rectos angulos in eodem plano (fig. 48.) duæ rectæ æquales *AC*, *BD*. Rursum in eodem plano intelligatur existere circulus *BLDH*, cujus diameter *BD*; sitque semicircumferentia *BLD* æqualis

Tab V.

lis

lis prædictæ *AB*. Præterea idem circulus ita in eo plano revolvi concipiatur super eâ rectâ *AB*, ut motu semper continuo, & æquabili perficiat, seu describat suæ ipsius semicircumferentiæ punctis prædictam *BA*; quousque nempe punctum *D*, ad illam semicircumferentiam spectans, perveniat ad congruendum ipsi puncto *A*, itaut propterea punctum *B*, ejusdem semicircumferentiæ alterum extremum punctum, deveniat ad congruendum illi puncto *C*.

His stantibus; si in semicircumferentia *BLD* designetur quodvis punctum *L*, cui in descripta recta linea *BA* correspondeat punctum *M*, ex quo in eo tali plano educatur perpendicularis *MK*, æqualis ipsi *BD*: Dico illud punctum K fore ipsum punctum *H* diametraliter oppositum illi puncto *L*. Nam ibi in puncto *M*, sive *L* recta *AB* continget prædictum circulum. Igitur *MK* eidem *AB* perpendicularis transibit (ex 19. tertii, quæ utique independens est ab Axiomate controverso) per centrum ejusdem circuli. Quare; ubi punctum *L* in eâ tali circuli *BLDH* revolutione perveniat ad congruendum cum puncto *M* ipsius *AB*, etiam punctum *H*, diametraliter oppositum prædicto puncto *L*, incidet in punctum *K* illius *MK*.

Porrò constat idem similiter valere de reliquis punctis semicircumferentiæ *BLD*, & horum diametraliter correlativis in altera semicircumferentia *BHD*. Quare linea, eo tali modo successivè descripta a punctis semicircumferentiæ *BHD*, erit illa eadem, jam expensa *DKC*, quæ nempe suis omnibus punctis æquidistet ab illa recta *BA*; sitque idcirco (juxta hypothesin anguli acuti) semper cava versùs partes ejusdem *AB*.

Inde autem fit, ut punctum *M* in ea *BA* censendum sit exactissimè æquale puncto *K* in altera *DKC*, propter omni-

omnimodam istorum æqualitatem cum punctis *L*, & *H* diametraliter oppositis in eo circulo *BLDH*. Quare; cum idem valeat de omnibus punctis descriptæ rectæ *BA*, si conferantur cum aliis uniformiter contrapositis in prædicta supposita curva *DKC*; consequens planè est, ut ipsa talis curva, ex hypothesi anguli acuti enascens, censenda sit æqualis contrapositæ basi *AB*. Atque id est, quod novâ hac methodo iterum demonstrandum susceperam.

SCHOLION II.

Rursum verò: quoniam recta *BA* intelligitur successivè descripta a punctis semicircumferentiæ *BLD* motu illo semper æquabili, & continuo; cui nempe descriptioni correspondet descriptio illius lineæ *DKC* a punctis diametraliter correlativis alterius semicircumferentiæ *BHD*: obvium est intelligere, quòd ipsa recta *BA* motu illo semper æquabili, & continuo describatur ab eo unico puncto *B*, quod nempe (veluti replicatum) intelligatur cum ipsa tali semicircumferentia semper excurrere super eâ *BA*; dùm interim eodem ipso tempore, motu eodem semper æquabili, & continuo, describitur illa altera *DKC* ab altero diametraliter correlativo unico puncto *D*, quod ipsum rursum (veluti replicatum) intelligatur cum sua altera semicircumferentia *BHD* semper excurrere super prædicta *DKC*. Tunc autem faciliùs intelligitur intenta æqualitas inter eam *DKC*, & eidem contrapositam rectam *BA*; quippe quæ duæ æquali ipso tempore, & æquali motu intelliguntur descriptæ a duobus exactissimè inter se æqualibus punctis, seu mavis infinitesimis. Ubi constat hanc ipsam exactissimam prædictorum punctorum æqualitatem non esse mihi in ista nova contemplatione necessariam.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Hypothesis anguli acuti est absolutè falsa, quia se ipsam destruit.

Demonstratur. Nam suprà ex ipsa hypothesi anguli acuti evidenter elicuimus, curvam *CKD* (fig. 46.) ex ea prognatam æqualem esse debere contrapositæ basi *AB*. Nunc autem contradictorium ex eadem hypothesi elicimus, quòd curva *CKD* nequeat esse æqualis illi basi, cum certè sit eâdem major. Quod enim curva *CKD* major sit rectâ *CD* ejus extremitates jungente, notio est omnibus communis, quam etiam demonstrare possumus ex vigesima primi, quòd duo trianguli latera reliquo semper sunt majora; junctis nimirum *CK*, & K*D*; ac rursum junctis similiter apicibus, primò quidem duorum, tum quatuor, & sic in infinitum, duplicato numero enascentium segmentorum, quousque intelligatur hoc pacto absumi, seu desinere in ipsas infinitè parvas seu chordas, seu tangentes, tota curva *CKD*. Sed hìc procedere possumus ex sola communi notione. Quòd autem juncta *CD* major sit basi *AB*, demonstratum a nobis est in 3. hujus ex ipsis visceribus hypothesis anguli acuti. Igitur curva *CKD*, ex hypothesi anguli acuti enascens, est certè major basi *AB*, quia est major, saltem ex communi notione, rectâ *CD*, quæ ex hac ipsa hypothesi anguli acuti demonstratur major basi *AB*. Non igitur potest simul consistere, quòd curva ista *CKD* æqualis sit basi *AB*. Itaque constat hypothesim anguli acuti esse absolutè falsam, quia se ipsam destruit.

SCHOLION.

OBservare tamen debeo, quòd etiam ex hypothesi anguli obtusi enascitur curva quædam *CKD*, sed convexa

vexa versùs partes basis *AB*. Nam *MH* (fig. 47.) bifariam dividens ipsas *AB*, *CD* erit (ex 2. hujus) eisdem perpendicularis; & major (ex Cor. I. post 3. hujus) ipsis *AC*, *BD*, in hypothesi anguli obtusi. Quare ipsius *MH* portio quædam *MK* æqualis erit ipsi *AC*, aut *BD*. Tum junctis *Ck*, & *kD*, divisisque bifariam in punctis *X*, *P*, *Q*, *N* rectis *Ck*, *AM*, *MB*, *kD*, constat (ex eadem 2. hujus) junctas *PX*, *QM*, perpendiculares fore ipsis rectis divisis. At rursum erunt illæ (ex eodem Cor. I. post 3. hujus) majores ipsis *AC*, *Mk*, *BD*. Hinc; assumptis earundem portionibus *PL*, *QS*, quæ prædictis æquales sint; habebimus curvam, ex hypothesi anguli obtusi enascentem, quæ transibit per puncta *C*, *L*, *k*, *S*, *D*. Atque ita semper, si decernere velimus reliqua puncta ejusdem curvæ. Inde autem constat eam fore convexam versùs partes basis *AB*. Jam fateor demonstrari uniformi planè methodo potuisse æqualitatem hujus curvæ cum ipsa basi *AB*. At quis fructus? Nullus sanè. Quemadmodum enim curva ista *CkD* censeri debet, ex communi saltem notione, major rectâ *CD*; ita etiam (in 3. hujus) basis *AB* demonstratur major eâdem *CD*, dum stet hypothesis anguli obtusi. Nullum ergo ex hac parte absurdum, si basis *AB* æqualis sit prædictæ curvæ. Aliter verò rem procedere in hypothesi anguli acuti, constat ex dictis suprà.

Ex hoc igitur Scholio, & ex altero post 13. hujus intelligi potest, diversam planè viam iniri debuisse ad refellendam utranque falsam hypothesim; unam anguli obtusi, & alteram anguli acuti.

Præterea facilè itidem est ex istis dignoscere, non nisi rectam lineam *CD* esse posse, quæ omnibus suis punctis æquidistet ab ea supposita recta linea *AB*.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

Et hoc est notum illud Axioma Euclidæum, quod tandem absolutè demonstrandum suscipio. Ad hunc autem finem satis erit recolere nonnullas præcedentium Demonstrationum. Itaque in meis Propositionibus, usque ad VII. hujus inclusivè, tres secrevi hypotheses circa rectam jungentem extrema puncta duorum æqualium perpendiculorum, quæ uni cuidam rectæ, quam basim appello, in eodem plano insistant. Porrò circa has hypotheses (quas invicem secerno ex specie angulorum, qui ad eam jungentem fieri censeantur) demonstro unam quamlibet earum, nimirum aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, si vel in uno casu sit vera, semper & in omni casu illam solam esse veram. Tum in XIII. ostendo universalem veritatem Axiomatis controversi, dum consistat alterutra hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi. Hinc in XIV. declaro absolutam falsitatem hypothesis anguli obtusi, quia se ipsam destruentis, utpote quæ prædicti Axiomatis veritatem infert, ex quo contra reliquas duas hypotheses soli hypothesi anguli recti locus relinquitur. Igitur sola restat hypothesis anguli acuti, contra quam diutiùs pugnandum fuit.

Et hujus quidem (post multa, ne dicam omnia, conditionatè expensa) absolutam falsitatem in XXXIII. tandem ostendo, quia repugnantis naturæ lineæ rectæ, circa quam multa ibi intersero necessaria Lemmata. Tandem verò in præcedente Propositione absolutè demonstro sibi ipsi repugnantem hypothesin anguli acuti. Quoniam igitur unica restat hypothesis anguli recti; consequens planè est, ut ex prædicta XIII. hujus stabilitum absolutè maneat prænunciatum Euclidæum Axioma. Quod erat propositum.

SCHOLION.

SEd juvat expendere hoc loco notabile discrimen inter præmissas duarum hypothesium redargutiones. Nam circa hypothesin anguli obtusi res est meridianâ luce clarior; quandoquidem ex ea assumpta ut verâ demonstratur absoluta universalis veritas controversi Pronunciati Euclidæi, ex quo postea demonstratur absoluta falsitas ipsius talis hypothesis; prout constat ex XIII. & XIV. hujus. Contra verò non devenio ad probandam falsitatem alterius hypothesis, quæ est anguli acuti, nisi priùs demostrando; quòd linea, cujus omnia puncta æquidistent a quadam supposita recta linea in eodem cum ipsa plano existente, æqualis sit ipsi tali rectæ; quod ipsum tamen non videor demonstrare ex visceribus ipsius met hypothesis, prout opus foret ad perfectam redargutionem.

Respondeo autem triplici medio usum me fuisse in XXXVII. hujus ad demonstrandam prædictam æqualitatem. Et primò quidem, in corpore illius Propositionis, demonstro eam curvam *CKD*, prout enascentem ex hypothesi anguli acuti (ac propterea semper cavam versùs partes illius rectæ *AB*) æqualem eidem esse debere, & quidem argumentum ducendo ex ipsis ejusdem curvæ tangentibus. Deinde in duobus ejusdem Propositionis subsequentibus Scholiis, præcisivè a qualibet speciali hypothesi, bis rursum demonstro æqualitatem illius genitæ lineæ *CD* cum subjecta recta linea *AB*, qualiscunque tandem censeatur esse ipsa linea *CD* eo modo genita.

Jam verò; quatenus illa curva *CKD*, prout enascens

ex

ex hypothesi anguli acuti, censeatur primo illo modo demonstrata æqualis subjectæ rectæ lineæ *AB*; manifesta evadit redargutio, cum ex eadem hypothesi evidenter demonstretur major. Sin autem alterutro ex duobus aliis modis ostensa censeatur æqualitas prædicta; neque tunc cessat redargutio contra hypothesin anguli acuti. Ratio est; quia nihil vetat, quin illa *CD* sit curva, & nihilominus æqualis sit illi rectæ *AB*, dum tamen sit semper versùs eas partes convexa, ac propterea recta jungens illa eadem puncta *C*, & *D* minor sit contrapositâ basi *AB*, prout in hypothesi anguli obtusi: At omnino repugnat, si versùs easdem partes sit semper cava, ac propterea recta jungens prædicta illa puncta *C*, & *D* major sit eâdem contrapositâ basi *AB*, prout in hypothesi anguli acuti. Atque ita declaratum jam est in Scholio præcedentis Propositionis. Scilicet contra hypothesin anguli obtusi manifestum est nullam hinc sequi redargutionem, quæ propterea unicè impetit hypothesin anguli acuti.

Hoc tamen loco aliquis fortasse inquiret, cur adeò sollicitus sim in demonstranda utriusque falsæ hypothesis exacta redargutione. Ad eum, inquam, finem, ut inde magis constet non sine causa assumptum fuisse ab Euclide tanquam per se notum celebre illud Axioma. Nam hic maximè videtur esse cujusque primæ veritatis veluti character, ut non nisi exquisitâ aliquâ redargutione, ex suo ipsius contradictorio, assumpto ut vero, illa ipsa sibi tandem restitui possit. Atque ita a prima usque ætate mihi feliciter contigisse circa examen primarum quarundam veritatum profiteri possum, prout constat ex mea Logica demonstrativa.

Inde autem transire possum ad explicandum, cur in Proemio ad Lectorem dixerim: *non sine magno in rigidam Logicam peccato assumptas a quibusdam fuisse tanquam datas* *duas rectas lineas æquidistantes*. Ubi monere debeo nullum eorum a me hìc carpi, quos in hoc meo Libro vel indirectè nominavi, quia verè magnos Geometras, hujusque peccati verissimè immunes. Dico autem: *magnum in rigidam Logicam peccatum*: quid enim aliud est assumere tanquam datas *duas rectas lineas æquidistantes*: nisi aut velle; quòd omnis linea in eodem plano æquidistans a quadam suppositâ lineâ rectâ sit ipsa etiam linea recta; aut saltem supponere, quòd una aliqua sic æquidistans possit esse linea recta, quam idcirco seu per hypothesin, seu per postulatum præsumere liceat in tanta aliqua unius ab altera distantia? At constat neutrum horum venditari posse tanquam per se notum. Scilicet ratio objectiva lineæ, quæ omnibus suis punctis æquidistet a quadam supposita linea recta, non ita clarè per se ipsam congruit cum definitione propria ipsius lineæ rectæ. Quare assumere duas rectas lineas sub ista *æquidistantiæ* ratione inter se *parallelas* fallacia est, quam in prædicta mea Logica appello *Definitionis complexæ*, juxta quam irritus est omnis progressus ad assequendam veritatem absolutè talem.

Unam tamen superesse adhuc video necessariam observationem. Nam lineam jungentem extrema puncta omnium æqualium perpendiculorum, quæ in eodem plano versùs easdem partes erigantur a singulis punctis subjectæ rectæ lineæ *AB*, debere esse & æqualem prædictæ *AB*, & rursum in seipsa rectam, fateri omnes volumus: Sed dico prius esse apud nos, quòd æqualis sit; deinde autem, quòd recta. Cum enim singula puncta illius rectæ *AB* intelligi possint semper æquabiliter procedere per sua illa perpendicula ad formandam tandem illam qualemcunque *CD*; manifestum videri debet, quòd illa qualiscunque genita *CD* æqualis sit eidem *AB*; præsertim verò, si respiciamus explicationem contentam in Scholio II. post

XXXVII.

XXXVII. hujus, ubi hoc punctum clarissimè demonstratum est.

Sed postea magna adhuc restat difficultas in demonstrando, quòd illa eadem sic genita *CD* non nisi recta linea sit. Atque hinc factum esse puto, ut ex communi quadam persuasione rectam lineam, pro faciliore progressu, maluerint præsumere, ut inde æqualem ostenderent illi basi *AB*, ac postea inferrent rectos angulos ad ipsam talem jungentem *CD*. Dico autem *magnam difficultatem*: Nam priùs expendere oportebat tres hypotheses circa angulos ad illam junctam *rectam CD*, nimirùm aut rectos, si ipsa æqualis sit basi *AB*; aut obtusos, si minor; aut acutos, si major. Tum verò ostendi debebat non nisi cavam esse posse versùs basim *AB* lineam curvam, quæ (in hypothesi anguli acuti) jungat extremitates illorum æqualium perpendiculorum, ac rursum non nisi convexam versùs eandem basim aliam curvam, quæ (in hypothesi anguli obtusi) jungat extremitates eorundem perpendiculorum. Deinde autem hypothesis quidem anguli acuti ex eo demonstranda erat falsa; quia linea jungens prædictorum perpendiculorum extremitates adeò non erit æqualis basi *AB*, ut immo (ex communi saltem notione) major sit illâ junctâ rectâ *CD*, quæ ex natura ipsiusmet hypothesis major est prædictâ basi *AB*. At hypothesis anguli obtusi aliunde ostendenda erat sibi ipsi repugnans, prout in XIV. hujus. Sed hæc jam satis.

Finis Libri primi.

EUCLI-

EUCLIDIS
AB OMNI NÆVO VINDICATI
LIBER SECUNDUS.

SOlo plerunque ratiocinio opus erit in toto hujus Libri decursu. Nam hìc Euclidem in eo unicè accusant, quòd in sexta Definitione Quinti magis obtenebret, quàm explicet naturam magnitudinum æquè proportionalium, sibique idcirco onus imponat demonstrandi plures Propositiones, quæ per se ipsas clarissimæ videri possunt, vel certè allatis ab ipso demonstrationibus clariores: Tum verò, quòd in quinta Definitione Sexti sub specie Definitionis Axioma quoddam assumat non facilè permittendum, sine prævia demonstratione.

PARS PRIMA.

In qua expenditur sexta Definitio Libri quinti Euclidæi.

DEfinit ibi Euclides magnitudines æquè proportionales, prout sequitur: *In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ, & tertiæ æquè multiplicia, a secundæ, & quartæ, æquè multiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrunque ab utroque vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondent.* Supersedeo ab omni exemplo, quia profiteor me scribere jam versatis in Geometria, non autem immaturis novitiis. Moneo tamen justè hoc loco reprehendi a Clavio Campanum, atque

Oron-

Orontium, quòd ita hanc Euclidis definitionem interpretentur, quasi tunc solùm illa *proportionalitas* subsistere debeat, quando prædicta æquè multiplicia vel unà deficiant, vel unà excedant *proportionaliter*, *sive in eadem proportione*. Nam id foret inducere Euclidem desipientem, qui nempe idem per idem definiret. Fateri igitur debemus, quòd Euclides loquatur de quolibet defectu, aut excessu; dum tamen ad utramque partem juxta quamlibet multiplicationem alteruter idem semper consistat, & non etiam aliquando ex una quidem parte defectus, ex altera autem aut æqualitas, aut excessus.

Audire jam oportet, quid reprehensione dignum invênerint in exposita Euclidæa Definitione. Itaque dicunt debuisse probari ab Euclide istud ipsum esse verum; quòd nempe, quoties prædicta qualiacunque æquè multiplicia vel unà excedunt, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, toties quatuor illæ magnitudines in eâdem sint ratione. Ego autem non satis miror, quomodo Viri apprimè docti in hunc lapidem impegerint. Quid enim, quæso, probari debuit ab Euclide? An fortè, quòd nusquam asserat, seu præsumat quatuor magnitudines in eadem esse ratione, nisi quando aliunde constet prædicta qualiacunque earundem æquè multiplicia vel unà excedere, vel unà deficere, vel unà æqualia esse? At id ipsum tam religiosè exequitur, ut nimius hac in parte videri quibusdam potuerit in demonstrandis primis undecim Propositionibus Libri quinti, quæ nimirùm, sub alio quodam magis vulgari æquè Proportionalium conceptu, immediatam sibi ipsis facerent fidem.

Rursum verò: Quid per se ipsum clarius, si præcisè attendamus ad vulgarem quandam acceptionem, quàm quòd Partes cum pariter Multiplicibus in eadem sint ratione; ut putà, quòd 4. eandem habeat rationem ad 6.

quam

quam habet 8. duplus ipsius 4. ad 12. duplum illius 6. ? Nihilominus magna ista claritas satis non fuit Euclidi, qui in Propos. 15. prædicti Libri istud ipsum demonstrat ex Definitione ab eo assumpta æquè Proportionalium; ne scilicet accusari posset de petitione Principii, hoc est de duplici assumpta Definitione. Nihil ergo probare debuit Euclides, quod facto ipso non probet.

Sed in hoc ipso (inquiet aliquis) peccare ipse videtur, quòd rem per se claram suâ illâ Definitione obscurare voluerit. Quasi verò (inquam ego) non potuerit acutus Euclides magnitudines invicem commensurabiles ab aliis non talibus separare, illasque idcirco ita definire, prout in Libro VII. Defin. XX. numeros proportionales apud Clavium definit: tunc nimirùm quatuor magnitudines proportionales fore: *Cum prima secundæ, & tertia quartæ æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certè, cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes*. Ita sanè: At quis fructus, cum tandem descendere debuerit ad magnitudines multis modis incommensurabiles? Decuit igitur, ut unâ, eâdemque Definitione ipsas etiam non invicem commensurabiles magnitudines complecteretur.

Nullus, inquiunt, refragatur; aliamque idcirco ipsis etiam quomodolibet incommensurabilibus magnitudinibus Definitionem assignant, quæ sequitur: *Prima ad secundam eandem rationem habebit, ac tertia ad quartam, si prima secundæ partes aliquotas quascunque contineat, quoties tertia quartæ similes partes aliquotas continet*: Ut putà; si magnitudo *A* toties continet magnitudinis *B* partes centesimas, millesimas, centies millesimas, & quascunque alias aliquotas similes; ita ut nulla sit pars magnitudinis *B*, quæ pluries contineatur in magnitudine *A*, quàm similis pars aliquota ipsius *D* contineatur in *C*, licèt in irrationalibus re-

stet

ſtet ſemper aliqua quantitas; tunc ita eſt *A* ad *B*, ut *C* ad *D*.

Agnoſco eximium, meiſque oculis familiarem Geometram ſic loquentem. Sed pace ipſius dictum ſit: nullum video hujus novæ Definitionis commendabilem fructum. Et primò quidem indignum puto homine Geometra aliud quidpiam intelligere in uſu alicujus termini ſcientifici præter id, quod in ejuſdem Definitione exprimitur; ac præſertim, ubi Definitio tradita ſit per voces minimè ambiguas, quales ſunt *multiplicatio*, *majus*, *minus*, *æquale*. Igitur Definitio Euclidæa repræhendi non debuit titulo obſcuritatis. Deinde verò: Nemo ibit inficias, quin promptior ſit ad uſum, ac propterea opportunior ad rectam, expeditamque intelligentiam multiplicatio præſcripta ab Euclide, quàm diviſio ab aliis ſubſtituta. Unicè igitur expendendum ſupereſt, an nova illa æquè proportionalium Definitio opportunior ſit ad demonſtrandum, ubi applicari debeat in ſpecialibus materiis. Ad hunc finem aſſumo Prop. primam Libri ſexti, quæ utique prima eſt omnium talium applicationum: ubi Euclides demonſtrat: Triangula, & Parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habere, ut baſes.

Ecce autem ex Euclide nitidiſſimam demonſtrationem. Sint duo triangula (fig. 49.) *ABC*, *DEF*, eandem habentia altitudinem, quorum baſes *BC*, *EF*. Omitto parallelogramma, quia ſcribo jam verſatis in Geometria. Jam dico ita eſſe triangulum *ABC* ad triangulum *DEF*, ut baſis *BC* ad baſim *EF*. Nimirùm; ſi baſis *BC* ſtatuatur prima magnitudo, baſis *EF* ſecunda, triangulum *ABC* tertia, & triangulum *DEF* quarta; Dico qualiacunque æquè multiplicia primæ ac tertiæ a quibuſvis æquè multiplicibus ſecundæ & quartæ vel unà deficere, vel unà æqualia eſſe, vel unà excedere, prout exigit Definitio ſexta Libri quinti.

Tab. VI.

Intelligantur enim prædicta triangula tum in eodem plano existere, tum etiam constituta esse inter easdem parallelas *AD*, *CBEF*; adeò ut nempe (ex natura parallelarum) æqualem altitudinem habeant. Tum verò sumptis in *BC* indefinitè protractâ quotvis portionibus *CI*, *IK*, *KL*, æqualibus ipsi *BC*; atque item in *EF* similiter protractâ quotvis *FM*, *MN*, æqualibus ipsi *EF*; jungantur *AI*, *AK*, *AL*; atque item *DM*, *DN*. Constat (ex 38. primi) æqualia inter se fore triangula *ALK*, *AKI*, *AIC*, *ACB*; atque item eâdem ratione æqualia inter se fore triangula *DEF*, *DFM*, *DMN*. Igitur, quàm multiplex est rectæ *CB* quæcunque assumpta recta *CL*, tam multiplex quoque erit triangulum *ACL* trianguli *ACB*; & quam multiplex est recta *EN* rectæ *EF*, tam quoque multiplex erit triangulum *DEN* trianguli *DEF*; quia in tot triangula æqualia sunt divisa tota triangula *ACL*, *DEN*, in quot rectas æquales sectæ sunt totæ rectæ *CL*, *EN*. Quoniam verò, si basis *CL* æqualis fuerit basi *EN*, necessariò (ex prædicta 38. primi) etiam triangulum *ACL* æquale est triangulo *DEN*; ac proinde, si *CL* major fuerit quàm *EN*, necessariò *ACL* majus est quàm *DEN*; & si minor, minus: consequens planè est, ut recta *CL*, & triangulum *ACL*, quæ assumpta sunt pro quibusvis æquè multiplicibus primæ magnitudinis *BC*, & tertiæ *ABC*; si conferantur (prout inter se respondent) cum recta *EN*, & triangulo *DEN*, quæ ipsa rursum assumpta sunt pro quibusvis æquè multiplicibus secundæ magnitudinis *EF*, & quartæ *DEF*; inveniantur semper vel unà æqualia esse, vel unà excedere, vel unà deficere. Igitur (juxta sextam Definitionem quinti) quæ proportio primæ *BC* ad secundam *EF*, basis ad basim, ea est tertiæ *ABC* ad quartam *DEF*, trianguli ad triangulum. Quod erat propositum.

Conferre nunc debeo præmissam Euclidæam Demonstraſtrationem cum alterâ indicati eximii Geometræ, quam ipſis ejuſdem vocibus ſtatim exhibeo.

Sint duo triangula (fig. 50.) *ABC*, *DEF*, quorum altitudo ſit eadem. Dico eandem eſſe rationem trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*, quæ baſis *BC* ad baſim *EF*. Demonſtratur. Intelligatur baſis *EF* diviſa in quotcunque partes æquales, ut putà in quatuor, & ex puncto *D* ducantur lineæ *DG*, *DH*, *DI*; & linea *BC* quadrantem lineæ *EF* contineat ter, ſintque lineæ *CM*, *ML*, *LK*, quæ ſint ſingulæ æquales lineis *EG*, *GH*, *HI*, *IF*, ducanturque lineæ *AK*, *AL*, *AM*. Triangula *DEG*, *DGH*, *DHI*, *DIF* ſingula ſunt æqualia (per 38. 1.) quia ſunt ſupra baſes æquales, & in eiſdem parallelis. Igitur ſunt quadrantes trianguli *DEF*: & quia triangula *ABC*, *DEF* habent æquales altitudines, etiam in eiſdem parallelis intelligi poſſunt conſtituta, & ſic triangula *AKL*, *ALM*, *AMC*, habentia baſes æquales cum triangulis *DEG*, *DGH*, *DHI*, *DIF*, illis æqualia erunt. Ergo quot erunt quadrantes lineæ *EF* in linea *BC*, tot erunt quadrantes trianguli *DEF* in triangulo *ABC*. Quod autem oſtenſum eſt de quadrantibus, poteſt ſimiliter oſtendi de quibuslibet partibus aliquotis. Igitur (juxta aſſumptam novam illam æquè proportionalium Definitionem) ut baſis *BC* ad baſim *EF*, ita triangulum *ABC* ad triangulum *DEF*. Quod erat &c.

Jam fateor hanc etiam demonſtrationem opportunam eſſe intento; ſed puto non æquè claram eſſe, atque Euclidæam. Ratio diſcriminis hæc eſt; quia poſterior Definitio procedit in *quid rei*; prior autem in *quid nominis*. Scilicet non eo inficias, quin probè demonſtratum ſit tot fore v. g. quadrantes (fig. 50.) trianguli *DEF* in triangulo *ABC*, quot erunt quadrantes baſis *EF* in baſi *BC*; atque ita uniformiter ſecundùm quamlibet aliam partem aliquotam.

At ubi venitur ad conclusionem, quòd triangulum ABC ita sit ad triangulum DEF, ut basis BC ad basin EF, hæret statim mens; cum magis immediatè debuerit inferri, ita esse basim KC ad basim EF, ut triangulum AKC ad triangulum DEF.

Neque juvat reponere, quòd una veritas alteri officere non debeat. Nam dico ex hac ipsa innegabili veritate oriri dubium posse, an fortè per nullam partem aliquotam ipsius EF quomodolibet multiplicatam exhauriri præcisè possit ipsa BC; quod sanè omninò continget, si ipsæ EF, BC sint incommensurabiles; nisi fortè provocare velimus ad partem aliquotam infinitè parvam, circa quam rursum non levis oriri posset difficultas.

Cur autem (urgebit quispiam) licitum fuerit Euclidi tradere suam illam Definitionem æquè proportionalium, quæ nulli communi notioni innititur; & non etiam aliis liceat quampiam aliam subrogare, quæ ex quadam cum numeris æquè proportionalibus similitudine sibi ipsi faciat fidem? Per me (inquam) quidquid libeat, licitum etiam hac in parte puto; dum tamen observentur duo sequentia. Primò; ut ne (quatenus procedi velit per Definitionem *puri nominis*) accusetur ut mala quæpiam alia *puri nominis* assumpta Definitio; nisi aut ostendatur ex ipsis ejusdem vocibus nimis perplexa, aut aliunde constet longiore quadam indagine opus esse ad assequendam *rem ipsam*, cujus nempe veluti propria dignosci tandem debeat exposita Definitio. Secundò autem; ut (quatenus procedi velit per Definitionem *ipsius rei* aliunde cognitæ) nunquam putemus *rem ipsam* assecutos nos esse, nisi clarè deveniamus ad illam originem, unde sumpta est occasio, aut opportunitas talis Definitionis.

Post hanc non inutilem digressionem duo alia opportunè subdo. Unum est; me non negare, quin posteriore

loco

loco exposita Demonstratio optima sit, & evidentissima; dum tamen ibi assumpta æquè proportionalium Definitio recipi unicè debeat in *quid nominis*. Sed tunc observo nullam fuisse causam respuendi, ac multò minùs damnandi Definitionem Euclidæam: cum ex una parte & Demonstratio eidem innixa nulli tergiversationi obnoxia sit; & ex alterâ Definitio, certissimè ibi assumpta in *quid nominis*, procedat per multiplicationem, quam unusquisque intelligit clariorem esse, ac faciliorem divisione, & quidem (suo quodam proprio jure) sine ullo periculo cujusvis objectæ incommensurabilitatis; prout constare potest ex antea dictis.

Alterum est; me rursum non negare, quin aliquo tandem pacto demonstrari possit prima illa Propositio Libri sexti, etiamsi assumpta censeatur in *quid rei* prædicta æquè proportionalium nova Definitio. Verùm arbitror hac sola ratione demonstrari eam posse, dum aliàs præsumatur unam aliquam esse rectam lineam determinatam, quæ ad basim BC eam habeat rationem, quæ est trianguli DEF ad triangulum ABC. Nam demonstrabo nullam EI, quæ sit portio ipsius EF, ac similiter nullam EX, quæ assumpta sit in EF productâ, tales esse posse, ut eam habeant ad basim BC rationem, quæ est trianguli DEF ad triangulum ABC.

Demonstratur prima pars. Nam constat primò (fig. 50.) talem ipsius BC assumi posse partem aliquotam BK, ut putà *octavam*, quæ minor sit illâ in EF residuâ portione IF. Constat hinc secundò; tot in EF designari posse portiones æquales ipsi BK, ita ut postrema designata portio desinat in punctum Q, quod jaceat inter puncta I, & F. Tunc autem (junctâ QD) manifestum fiet (ex 38. 1.) tot contineri in triangulo DEQ octavas partes trianguli ABC, quot in basi EQ continentur octavæ partes illius

basis

basis *BC*. Quare (ex nova illa assumpta in *quid rei* æquè proportionalium Definitione) ita erit triangulum *DEQ* ad triangulum *ABC*, ut basis *EQ* ad basim *BC*. Habet autem *EQ* ad *BC* majorem rationem (ex 8. 5.) quàm illa *EI* ad eandem *BC*; Igitur (ex 13. 5.) etiam triangulum *DEQ* non æqualem, sed majorem rationem habebit ad triangulum *ABC*, quàm sit ratio prædictæ *EI* ad illam basim *BC*. Quod erat priore loco demonstrandum.

Demonstratur secunda pars. Nam rursum constat primò; talem illius *BC* assumi posse partem aliquotam *BK*, ut putà *decimam*, quæ minor sit illo excessu *FX*, quo basis *EF* superatur ab ipsa *EX*. Atque hinc constat secundò; tot in *EX* designari posse portiones æquales ipsi *BK*, ita ut postrema designata portio desinat in punctum *T*, quod jaceat inter puncta *F*, & *X*. Tunc autem (junctâ *TD*) manifestum fiet (ex eadem 38. 1.) tot in triangulo *DET* decimas partes trianguli *ABC* contineri, quot in basi *ET* continentur decimæ partes ipsius basis *BC*. Quare (ex eadem assumpta in *quid rei* æquè proportionalium nova Definitione) ita erit triangulum *DET* ad triangulum *ABC*, ut basis *ET* ad basim *BC*; & invertendo ita erit triangulum *ABC* ad triangulum *DET*, ut basis *BC* ad basim *ET*. Habet autem basis *BC* ad basim *ET* rationem majorem (ex eadem 8. 5.) quàm sit ratio ejusdem basis *BC* ad illam *EX*, quæ supponitur major prædictâ *ET*; ac propterea (ex eadem 13. 5.) majorem ratione trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*. Non igitur ulla *EX*, quæ sit major ipsâ *EF*, talis esse potest, ad quam basis *BC* eam habeat rationem, quæ est trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Unde tandem fit, ut ratio trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*, quod eandem cum ipso altitudinem habeat,

eadem

eadem sit ac basis BC ad basim EF; dum scilicet aliàs præsumatur unam aliquam esse rectam lineam determinatam, ad quam basis BC eam habeat rationem, quæ est trianguli ABC ad triangulum DEF. Quod erat principale intentum.

Post hæc autem addere insuper debeo, non placere mihi necessitatem illius *Petitionis*, quòd una aliqua sit recta linea determinata, ad quam prædicta basis BC eam habeat rationem, quæ est trianguli ABC ad triangulum DEF. Nam certè verus nævus hic foret, maximè dolendus in primo ingressu novæ hujus apud Geometras nobilissimæ partis; quòd scilicet reperiri demonstrativè non possit recta linea, ad quam talis quæpiam data recta eam rationem habeat, quæ est vel talis cujusdam dati trianguli rectilinei ad alterum datum triangulum rectilineum, vel talis cujuslibet datæ rectæ ad alteram quamlibet propositam rectam lineam; quòd, inquam, talis recta linea reperiri non possit, nisi antea præsumendo, per modum primi Principii, quòd una aliqua ejusmodi recta linea verè existat in rerum natura.

Sed hic audio quempiam reclamantem, quòd ipse etiam Euclides, sine demonstratione, hoc veluti Axiomate utitur in Propos. 18. 5. ubi demonstrat compositionem rationis; hoc est, *duas magnitudines, quæ divisæ proportionales sint, has quoque compositas proportionales esse*. Quin etiam Clavius, acutissimus Euclidis Interpres, sub expresso *Axiomatis* nomine, ante omnes prædicti Libri Propositiones sic præmittit: *Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quævis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propositam*. Hujus autem assumpti hanc reddit rationem. *Quamvis enim ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam*

esse

esse posse in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, ut Philosophi loquuntur, neque absurdi aliquid ex eo consequatur.

Veruntamen, his ipsis stantibus, non desino agnoscere indecorum nævum, a quo, ex officio assumpto, vindicare debeam Euclidem; præsertim verò, cum ipse Clavius non Euclidi, sed interpretibus istud attribuat. Itaque dico illam 18. 5. demonstrari potuisse sine ullo recursu ad intrusum illud Axioma; nimirùm provocando ad quasdam Libri sexti Propositiones, quæ ab illo intruso Axiomate nullatenus pendent; & ex quibus illud ipsum Problematicè demonstratur, saltem quoad lineas rectas. Cur autem oculatissimus Clavius non id animadverterit, in causa esse potuit, quòd ibi fusior esse debuerit in explicanda vera doctrina proportionum, adversùs quosdam non ignobiles Euclidis interpretes.

Jam pergo ad exequendum munus assumptum: Ubi, ut expeditior sim, resolvendo magis, quàm componendo, rem ipsam paucioribus exhibere conabor. Præmitto autem, assumi hìc posse tanquam a me juxta Euclidem jam demonstratam primam sexti, sine ulla dependentia a præfato Axiomate; cum ibi (si excipias doctrinam parallelarum) sola usui fuerit ex Libro primo Propositio 38. & ex quinto Euclidæa æquè proportionalium Definitio.

Deinde transeo ad exequendum Problema, quod continetur in 12. sexti; ubi datis tribus rectis lineis, ut putà AD, DB, AE, præcipitur quartæ proportionalis inventio. Disponantur enim (fig. 51.) primæ duæ AD, DB secundùm lineam rectam, quæ sit AB: Tertia verò AE quemlibet angulum A efficiat cum prima AD. Deinde ex D ad E recta ducatur DE, cui per B parallela ducatur BC, occurrens rectæ AE productæ in C. Dico ipsam EC esse quartam proportionalem quæsitam. Cum enim in tri-

angulo

gulo *ABC* acta sit parallela *DE*; erit (ex 2. 6.) ut *AD* ad *DB*, ita *AE* ad *EC*. Quare *EC* erit quarta proportionalis quæsita. Quod erat &c.

Verùm obstat, quòd nondum demonstravi independentiam secundæ Sexti ab illo intruso Axiomate. Itaque (manente eadem Figura) jungantur *EB*, *CD*. Constat (ex 37. primi) æqualia inter se fore triangula *DEB*, *DEC*, utpote constituta inter easdem parallelas *DE*, *BC*, & super eadem basi *DE*. Quare (ex 7. 5.) ut triangulum *ADE* ad triangulum *DEB*, ita est idem triangulum *ADE* ad triangulum *DEC*. Atqui ut triangulum *ADE* ad triangulum *DEB*, ita est (ex 1. 6.) basis *AD* ad basim *DB*; propter æqualem eorundem altitudinem in puncto *E*: & eadem ratione, ut triangulum *ADE* ad triangulum *CDE*, ita est basis *AE* ad basim *EC*; propter æqualem eorundem altitudinem in puncto *D*. Igitur (ex 11. quinti) ut *AD* ad *DB*, ita est *AE* ad *EC*; cum hæ duæ proportiones eædem sint proportionibus trianguli *ADE* ad triangulum *DEB*, & ejusdem trianguli *ADE* ad triangulum *DEC*. Quod erat hoc loco demonstrandum.

Hinc porrò evidenter constat nihil vetuisse, quin statim (præciso ordine materiæ) post 17. 5. procederet Euclides ad demonstrandas primam, secundam, & duodecimam sexti, quæ utique satis erant ad stabiliendam, saltem pro lineis rectis, illam 18. ejusdem quinti, pro qua sola induci ibi debuerat præfatum Axioma. Quòd enim post illam 12. sexti progredi facilè possimus (sine indigentia novæ alicujus præsumptæ veritatis) ad inveniendam rectam lineam, quæ ita se habeat ad aliam quamlibet datam rectam, ut unum quodvis datum triangulum rectilineum ad alterum quodlibet datum triangulum rectilineum, etiamsi non æqualis altitudinis cum priore; solis Geometriæ imperitis difficile videri poterit. Porrò uniformiter constabit, reperiri similiter posse rectam lineam, quæ ita se habeat ad quamlibet aliam datam rectam, ut una quælibet data figura rectilinea ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam. Atque hæc rursum utrovis modo vice versâ.

Sed video opponi adhuc mihi posse ipsummet Euclidem, qui in 2. 12., ut ostendat eandem esse rationem cujusvis circuli ad alterum quemlibet exhibitum circulum, quæ est quadratorum ab ipsorum diametris, tacitè præsumit unam aliquam esse in rerum natura superficiem, vel æqualem, vel majorem, vel minorem exhibito circulo, ad quam alter circulus eam habeat rationem, quæ est prædictorum ab illis diametris quadratorum.

Et hìc quidem duo respondenda censeo. Unum est; absonam utique videri potuisse, in ipso primo ingressu hujus materiæ *de proportionibus*, præsumptionem ejusmodi; sed non etiam, postquam circa lineas rectas, ac figuras rectilineas demonstratum generaliter id sit (non obstante qualicunque earundem irrationalitate) aut incongruum, aut nimis remotum a veritate videri posse, quòd simile quidpiam præsumatur circa duas figuras rectilineas ex una parte, & ex altera duas circulares. Alterum est; neque ibi necessariam esse Euclidi jam dictam præsumptionem. Nam antea in prima duodecimi sine ulla præsumptione demonstrat, duo quælibet in circulis similia poligona esse inter se, ut a diametris quadrata. Deinde (in ipsa secunda) absolutè rursum demonstrat, tale in exhibito circulo (duplicando, ac duplicando numerum laterum) inscribi posse poligonum, cujus defectus ab ipso integro circulo minor sit qualibet parvulâ assignatâ magnitudine; intactâ nihilominus manente eâdem semper ratione ad alterum simile poligonum, quod in alio circulo inscribatur. Quare ipsosmet circulos considerare jam potuit tanquam simi-

lia

lia infinitilatera poligona, in quibus propterea firma adhuc consisteret jam demonstrata ratio, quæ est quadratorum a diametris.

Agnosco tamen doctioribus Geometris nunquam plenè satisfactum iri, nisi aliquo tandem pacto aut generaliter demonstrem præsumptum illud Axioma, aut saltem unum aliquod in ejus locum substituam, quod usui esse possit in decursu universæ Geometriæ. Ecce autem statim rem exequor.

Dico enim assumi posse hoc alterum Axioma; quòd nempe *duæ quælibet, in quolibet eodem genere constitutæ magnitudines, rationem inter se habebunt, quæ vel æqualis sit, vel major, vel minor ratione duarum quarumlibet aliarum magnitudinum, quæ vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quolibet ipsarum proprio constitutæ sint*. Ubi constat duplex a me onus assumi; nimirùm demonstrandi & veritatem propositi Axiomatis, & plenam ejusdem sufficientiam pro usu in decursu totius Geometriæ.

Priori oneri sic satisfacio. Sint quatuor magnitudines (fig. 52.) *A*, *B*, *C*, *D*, quarum duæ priores in suo proprio genere, ac similiter posteriores vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quodam suo proprio genere consistant. Dico rationem tertiæ *C* ad quartam *D* vel æqualem fore, vel majorem, vel minorem ratione primæ *A* ad secundam *B*.

Demonstratur. Sumantur enim ipsarum *A* primæ, & tertiæ *C*, duæ quælibet æquè multiplices *EF*, *GH*; atque item ipsarum *B* secundæ, & quartæ *D*, duæ quælibet æquè multiplices *IK*, *LM*. Constat primò, rationem ipsius *A* ad *B* æqualem fore rationi ipsius *C* ad *D*, si vel in uno casu talium assumptarum æquè multiplicium contingat, ut *EF* multiplex primæ æqualis sit ipsi *IK* multiplici secundæ, & *GH* multiplex tertiæ æqualis sit ipsi *LM* multiplici quartæ.

Ratio evidens eſt; quia hìc agitur de multiplici propriè tali ſecundùm veram rationem numeri, juxta quam multiplicatum non tranſit in novam ſpeciem entis, ſed in eadem ſpecie conſiſtens ita ſe habet v.g. *EF* ad *A*, ut numerus ibi multiplicans ad unitatem. Quoniam igitur genitæ magnitudines *EF*, & *IK* ponuntur æquales; conſequens eſt (ex 19. 7.) ut numeri, per quos multiplicantur magnitudines *A*, & *B*, ſint inter ſe reciprocè, ut ipſæ magnitudines multiplicatæ. Simili modo oſtendetur numeros, per quos multiplicantur magnitudines *C*, & *D*, eſſe inter ſe reciprocè, ut ſunt magnitudines multiplicatæ; Porrò (ex hypotheſi) per eundem quempiam numerum multiplicatæ intelliguntur magnitudines *A*, & *C*; ac ſimilter magnitudines *B*, & *D*. Igitur (ex 11. 5.) ita erit prima *A* ad ſecundam *B*, ut tertia *C* ad quartam *D*. Quod erat hìc demonſtrandum.

Conſtat ſecundò, rationem primæ *A* ad ſecundam *B* majorem fore ratione tertiæ *C* ad quartam *D*; ſi vel in uno caſu talium aſſumptarum æquè multiplicium contingat, ut *EF* multiplex primæ excedat ipſam *IK* multiplicem ſecundæ, ſed *GH* multiplex tertiæ non excedat illam *LM* multiplicem quartæ; aut illa *EF* æqualis ſit prædictæ *IK* (prout ego cum Clavio interpretor) dum altera *GH* minor eſt ſibi correſpondente *LM*.

Patet autem nullâ mihi argumentatione opus hìc eſſe. Nam omnes ſciunt hanc ipſam eſſe rectam intelligentiam Definitionis octavæ Libri quinti, juxta quam Euclides conſtantiſſimè, ac rigidiſſimè ſemper procedit. Ubi adverto (propter quoſdam minùs doctos) aliud eſſe accuſare Euclidem de quadam veluti affectatâ in ſuis quibuſdam definitionibus obſcuritate; & aliud longè diverſum, quòd non ritè juxta aſſumpta proceſſerit; cum magis omnes

nes

docti consentiant accuratissimum hac in parte eundem fuisse. Unicè igitur restat hoc loco, ut substitutum a me Axioma clarissimè demonstrem.

Sic autem procedo. Vel inter possibiles æquè multiplices primæ *A*, & tertiæ *C*, ac simul inter possibiles æquè multiplices secundæ *B*, & quartæ *D*, una quæpiam reperitur *EF* multiplex primæ *A*, & *IK* multiplex secundæ *B* invicem æquales; ac simul (in eodem casu) una quædam *GH* multiplex tertiæ *C* æqualis ipsi *LM* multiplici quartæ *D*: vel nusquam talis æqualitas reperitur. Si primum; constat ex jam demonstratis ita fore *A* ad *B*, ut *C* ad *D*. Sin verò nusquam reperitur ejusmodi simul ex utrâque parte æqualitas; vel saltem ad alterutram partem reperitur, ut putà ad partem primæ *A*, vel nusquam. Si primum; ergo (ex præmissa Euclidæa majoris, ac minoris proportionis Definitione) habebit *A* ad *B* majorem, aut minorem proportionem, quàm *C* ad *D*; prout *GH* multiplex tertiæ *C* minor fuerit, aut major ipsâ *LM* multiplici quartæ *D*. Sin verò secundum; ergo ex una quidem parte v. g. ad ipsas *A* primam, & *B* secundam, contingere poterit, ut illa multiplex *EF* minor sit alterâ multiplici *IK*, dum vice versâ ex altera parte illa multiplex *GH* major est alterâ multiplici *LM*. Tunc autem (sub eadem Euclidæa Definitione) ratio primæ *A* ad secundam *B* erit minor ratione tertiæ *C* ad quartam *D*; aut vice versâ.

Igitur demonstratum manet substitutum illud Axioma; quòd nempe duæ quælibet, in quolibet eodem genere constitutæ magnitudines, rationem inter se habebunt, quæ vel æqualis sit, vel major, vel minor ratione duarum quarumlibet aliarum magnitudinum, quæ vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quolibet ipsarum proprio constitutæ sint. Quod erat onus priore loco mihi impositum.

Tran-

Transeo ad secundum onus mihi adjectum. Ubi, ad exemplum aliarum in decursu Geometriæ similium, illustrandam suscipio illam secundam duodecimi, præmissis (claritatis gratiâ) duobus sequentibus Lemmatis.

LEMMA I.

SI quæpiam tertia magnitudo C habeat (fig. 52.) ad quartam D majorem rationem, quàm sit ratio primæ A ad secundam B; habebit etiam illa C ad eandem D, auctam quapiam magnitudine X, majorem rationem, quàm sit prædicta ratio primæ A ad secundam B.

Nam constat prædictam LM, multiplicem quartæ D; tali magnitudine S augeri posse, ut adhuc minor sit illâ GH multiplici tertiæ C. Quare, si quarta D augeatur magnitudine X, cujus prædicta S ita sit multiplex, ut LM est multiplex quartæ D, sive illa IK est multiplex secundæ B; non ideo (ex defin. 8. 5.) ratio tertiæ C ad quartam DX desinet esse major ratione primæ A ad secundam B; quia adhuc GH multiplex tertiæ C major erit illâ LS multiplici quartæ DX, dum interim EF multiplex primæ A major non est illâ IK multiplici secundæ B. Quod erat &c.

LEMMA II.

POrrò autem (ne peritum Geometram in re facili molestè detineam) simili modo ostendam, quòd tertia illa magnitudo C; quatenus ponatur habere ad quartam D minorem rationem, quàm sit ratio primæ A ad secundam B; habebit etiam ad eandem D, imminutam quapiam magnitudine T, minorem rationem, quàm sit prædicta ratio primæ A ad secundam B. Ratio est; quia (ex 26. 5.) habebit convertendo secunda B ad primam A minorem rationem,

tionem, quàm quarta *D* ad tertiam *C*. Igitur (ut in precedente Lemmate) habebit adhuc quarta *D* ad tertiam *C*, auctam quapiam magnitudine *Y*, majorem rationem, quàm sit secundę *B* ad primam *A*. Quapropter (ex eâdem 26.5.) habebit rursum convertendo prima *A* ad secundam *B* majorem rationem, quàm tertia *C*, aucta illâ magnitudine *Y*, ad quartam *D*.

Quoniam verò illa magnitudo *Y* sumi potest minor, ac minor, adeò ut sit pars quędam ipsius *C* ab aliquo finito numero denominata; ac propterea sit pars ipsius *YC* a numero unâ unitate majore denominata: si rursum illius magnitudinis *D* sumatur pars quępiam *T*, ab eodem numero denominata, a quo *Y* denominatur talis pars prędictę *YC*; erit (ex 15.5.) *Y* ad *T*, ut *YC* ad *D*. Igitur (ex 13.5.) ratio primę *A* ad secundam *B* major etiam erit ratione illius *Y* ad alteram *T*. Undè tandem fit (ex illâ 13. & prędictâ 15.5.) ut illa tertia *C*, post sublatam ab *YC* additam illam portionem *Y*, minorem adhuc habeat rationem ad quartam *D*, imminutam notâ illa magnitudine *T*, quàm sit ratio primę *A* ad secundam *B*. Quod erat intentum.

PROPOSITIO PRINCIPALIS:

In qua illustratur secunda Duodecimi; simulque exponitur substituti Axiomatis Major forsitan opportunitas pro similibus casibus in decursu totius Geometriæ.

DEmonstrat ibi Clavius ex Euclide, circulos esse inter se, quemadmodum a diametris quadrata. At supponit (ex communi ab Interpretibus intruso Axiomate) quòd unus circulus habebit ad aliquam magnitudinem,

quæ

quæ vel æqualis ſit, vel major, vel minor altero circulo, eam rationem, quæ eſt prædicta quadratorum a diametris. Porrò, hoc ſtante, clariſſimè exequitur intentum ſuum; quia optimè demonſtrat nullam eſſe poſſe magnitudinem aut majorem, aut minorem altero circulo, ad quam prior circulus eam habeat rationem, quam expoſuimus.

Jam ego ſubſtituo alterum a me demonſtratum Axioma, quòd unà cum duobus adjectis Lemmatis ſic applicatur in noſtrâ materia: Habebit unus circulus ad alterum circulum vel eandem rationem, quæ eſt jam dicta quadratorum a diametris, vel habebit rationem iſtâ majorem, non modò ad illum alterum circulum, ſed etiam ad aliquam magnitudinem eodem altero circulo majorem, ut putà ad poligonum aliquod eidem circumſcriptum: vel tandem habebit rationem minorem, non modò ad prædictum alterum circulum, ſed etiam ad aliquam magnitudinem eodem minorem, ut putà ad poligonum aliquod eidem inſcriptum.

Tum unuſquiſque videt, quàm facilè (ex Prop. 8. 5.) demonſtrari poſſit, non poſſe priorem circulum ad quoddam poligonum, poſteriori circulo circumſcriptum, habere majorem rationem, quàm ſit ratio illa quadratorum ex diametris; cum ſimile poligonum priori circulo circumſcriptum habeat ad jam dictum poligonum (ex 1. 12.) eam ſolam rationem, quæ eſt prædictorum quadratorum: ac ſimiliter priorem jam dictum circulum habere non poſſe ad quoddam poligonum, eidem poſteriori circulo inſcriptum, minorem rationem, quàm ſit eadem ratio prædictorum quadratorum; cum ſimile poligonum priori circulo inſcriptum habeat (ex eâdem 1. 12.) ad modò dictum poligonum eam ipſam rationem, quæ eſt illorum ſtabilium quadratorum: Atque hinc tandem fit, ut prior ille circulus (ex meo

ſub-

substituto, ac demonstrato Axiomate cum adnexis Lemmatis) eam habere debeat ad posteriorem circulum rationem, quæ est jam dictorum quadratorum.

Constat autem pro similibus casibus procedi similiter posse in decursu totius Geometriæ. Igitur substitutum, ac demonstratum a me Axioma, cum suis adnexis Lemmatis, non modò utile, verùm etiam opportunius videri potest illo alio communi merè præsumpto, & indemonstrato. Quod &c.

SCHOLION I.

Quia tamen in meo secundo Lemmate bis assumpsi 26. 5. quæ apud Clavium non demonstratur sine recursu ad illud commune Axioma, a me repudiatum in rigore Axiomatis; eam idcirco demonstro ex sola Definitione Euclidæa. Si enim prima *A* (fig. 52.) ponatur habere ad secundam *B* majorem rationem, quàm tertia *C* ad quartam *D*; debebit quædam *EF* multiplex primæ *A* æqualis esse, aut major quadam *IK* multiplici secundæ *B*; dum interim (ex æquo) quædam *GH* æquè multiplex tertiæ *C*, ut *EF* est multiplex primæ *A*, vel minor est, vel non major quadam *LM* æquè multiplici quartæ *D*, ut *IK* est multiplex secundæ *B*. Tunc autem (considerando vice versâ *B* ut primam, & *A* ut secundam; ac similiter *D* ut tertiam, & *C* ut quartam) debebit quædam *IK* multiplex primæ *B* aut æqualis esse, aut minor quadam *EF* multiplici secundæ *A*; dum interim (ex æquo) quædam *LM* æquè multiplex tertiæ *D*, ut *IK* est multiplex primæ *B*, vel major est, vel non minor quadam *GH* æquè multiplici quartæ *C*, ut *EF* est multiplex secundæ *A*. Quare (ex Def. 8. 5.) habebit ex opposito illa *B* statuta ut prima, ad alteram *A* statutam ut secundam, minorem rationem, quàm sit ratio illius D ſtatutæ ut tertiæ, ad alteram C ſtatutam ut quartam. Quod erat &c.

SCHOLION II.

NE verò acutus quiſpiam Geometra accuſare me poſſit, quaſi de induſtria in rem meam immutaverim Definitionem Euclidæam majoris, ac minoris proportionis; quoniam ego volo rationem primæ A ad ſecundam B majorem eſſe ratione tertiæ C ad quartam D; quoties (collatis inter ſe jam notis quibuſvis illis æquè multiplicibus) vel ſemel inveniatur multiplex primæ æqualis eſſe, aut major multiplici ſecundæ, dum ex æquo multiplex tertiæ vel minor eſt, vel non major multiplici quartæ; cum Euclides (in illa Def. 8. 5.) unicè id aſſumat, quoties multiplex primæ major ſit multiplici ſecundæ, & non etiam multiplex tertiæ major ſit multiplici quartæ: duas afferre hic debeo clariſſimas reſponſiones, quæ omnem dubitationem ſuſtollant.

Prior reſponſio hæc eſt; quòd ipſe Clavius (prout ſuo loco inſinuavi) prædictam Definitionem ſic interpretatur: *Quòd ſi quando è contrario multiplex primæ deficiat a multiplici ſecundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad ſecundam minorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam*. Porrò nemo omnium neſcit *majus*, ac *minus* correlativè invicem dici. Igitur, juxta hanc interpretationem, tertia magnitudo dicetur habere majorem rationem ad quartam, quàm prima ad ſecundam; ſi quando contingat, ut multiplex tertiæ vel æqualis ſit, vel major multiplici quartæ, dum multiplex primæ minor eſt multiplici ſecundæ; atque id propterea eodem jure vice verſâ. Cur verò (hoc ſtante) præfatus Clavius (cujus eximium in demonſtrando nitorem magni a me fieri

fateor)

fateor) non demonstraverit eam 26. 5. ex sola Definitione; ex eo evenisse vaticinor, quia aliàs non dubitabat de veritate illius ab aliis Interpretibus jam intrusi Axiomatis; unde fieri potuit, ut nobilius, aut expeditius fortasse censuerit a prima ipsa Definitione aliquantulum recedere.

Posterior, & longè potior responsio est, quæ sequitur. Licitum est unicuique definire, prout ipsi libuerit, terminos suæ facultatis; dum tamen ex unâ parte eos nunquam usurpet, nisi juxta Definitiones jam stabilitas; & ex altera accusari istæ non possint de confusione unius termini cum altero. Hoc autem loco nos esse in casu manifestè liquet. Nam constat, Definitiones æqualis, majoris, ac minoris proportionis traditas esse per membra opportunè contradictoria, inter quæ nec medium dari potest, nec inexpectata confusio. Quid enim clarius, minusque confusioni obnoxium; quàm quòd (sumptis quibusvis æquè multiplicibus primæ, ac tertiæ, ac rursum quibusvis secundùm eandem, vel quamlibet aliam multiplicationem, æquè multiplicibus secundæ, ac quartæ) si fiat comparatio multiplicis primæ cum multiplici secundæ, ac similiter multiplicis tertiæ cum multiplici quartæ, vel unà deficiant, vel unà excedant, vel unà æqualia sint? Similiter verò: quid clarius, minùsque rursum confusioni obnoxium, quàm quòd (in defectu prædictæ uniformitatis) aliquando contingat, ut multiplex primæ vel major sit, vel saltem æqualis multiplici secundæ, dùm interim multiplex tertiæ vel major non est, vel neque æqualis multiplici quartæ; aut vice versâ? Atque hinc (occlusâ necessitate alterius subdivisionis) clarissimè distinctas habemus Definitiones æqualis, majoris, ac minoris proportionis; inter primam, & secundam ex una parte; ex altera verò tertiam, & quartam. Plura alia in hanc rem hìc omitto, quia spectantia ad sequens in hac materia Principale Scholium.

SCHOLION III. *omnino Principale.*

NObilis quidam Nationis nostræ Italicæ Scriptor, quem honoris causſâ hìc non nomino, quia verè eximium, ac magnum Geometram; nimius videri poteſt in accuſando tam frequenter Euclide ſuper Definitionibus terminorum. Aſſumo hìc præ cæteris expendendam accuſationem circa magnitudines proportionales. Præmittit laudatus Auctor neminem inficiari, quin ſexta illa Libri quinti Definitio *perplexa ſit, ignota, & ideo reſpuenda.* Rationem affert, quia *Definitio ſcientifica debet evidentiſſimè exponere naturam rei definitæ per paſſionem poſſibilem, veram, primam, & notiſſimam, per quam definitum diſtinguatur a quolibet alio ſubjecto.* At ego (cum bona venia tanti Viri) reponere poſſem, unum aliquem inter omnes eſſe Chriſtophorum Clavium, ipſi optimè notum, & aliàs in rem ſuam circa parallelas ab eodem citatum, qui tamen hanc ipſam circa proportionales magnitudines Euclidæam Definitionem maximè commendat, tueturque ab adverſis, aut extraneis interpretationibus. Sed præſtat meritum cauſæ diligentiùs inſpicere.

Admitto *Definitionem ſcientificam* tradi debere, prout ibi deſcribitur; omiſsâ dumtaxat illâ particulâ *primam*, de qua poſtea ſpeciatim agemus. Nam multiplicatio propoſitarum quatuor magnitudinum, ſimulque præſcripta collatio inter earundem multiplices, ſecundùm rationem *majoris, minoris*, aut *æqualis*, quæ ſemper, aut non ſemper conſiſtat, paſſio eſt *poſſibilis, vera, & notiſſima*, immo etiam (propter membra contradictoria) cognita neceſſaria, *per quam definitum diſtinguitur a quolibet alio non tali ſubjecto.* Ubi indignum foret tanto Viro; ſi quis cenſeret eum reſpicere ad infinitas ſecundùm quemlibet numerum propoſitarum magnitudinum præſcriptas multiplicationes, quas

certè

certè mens humana assequi omnes distinctè non potest, & sic neque inter se conferre secundùm præscriptas rationes *majoris*, *minoris*, aut *æqualis*. Nam id necessarium non esse constare potest ex prima sexti, prout jam evidenter declaravi.

Venio ad ly *primam*. Atque hìc (cum bona rursum venia) satis mirari non possum, quomodo laudatus Vir provocare velit ad passionem *primam* in sensu veluti metaphysico, ex qua nempe, tanquam primo fonte, reliquæ proprietates ratione nostrâ promanare intelligantur. Si enim loquatur de passione *primâ* quò ad nos, tam certum est assignatam ab Euclide esse verissimè primam, quàm certum est, ejusmodi eam esse, ut inde reliquæ omnes huc usque notæ proportionalium passiones cum summa certitudine eruantur; quod utique notum est omnibus Geometris. In hac proinde materia distinguendum sic puto. Vel agitur de subjecto quopiam per aliquam experientiam aliunde cognito, ut sunt elementa vulgaria, mista, planetæ, stellæ, aliaque hujuscemodi: & in istis dico Definitionem tradi debere per talem passionem, quæ præcognita jam sit, eamque appello Definitionem *quid rei*. At ubi agitur de subjecto, quod nulli communi experientiæ subjaceat, unde ab omni non ipso supponi debeat jam discretum, quales procul dubio sunt magnitudines inter se proportionales, & tunc dico opportunius omnino esse procedere per Definitionem *quid nominis*, dum scilicet observentur hæc duo. Unum est; ut ne talis afferatur Definitio, quæ repugnet, seu non comprehendat magnitudines invicem commensurabiles, quæ nimirum sub datis quibusdam numeris exhiberi possint. Nam Definitio debet esse universalis, ac propterea non excludens magnitudines sub tali nomenclatura jam notas. Alterum est, ut nulla altera passio de ipso tali sic definito præsumatur, nisi quæ ex ipsa

tali

tali statuta Definitione promanet. Atque ita certissimè nullo refragante, procedit in hac materiâ Euclides.

Adeò igitur hac in parte repræhendi ipse non potest, ut immo a quadraginta circiter annis in fine meæ Logicæ Demonstrativæ sic scripserim, ac demonstraverim. *Huc si respexissent doctissimi cæteroqui Geometræ, non tantùm peccassent, ut in dubium revocarent Definitionem sextam Libri quinti Euclidis de æquè proportionalibus. Scilicet deponere noluerunt omnem prævium conceptum æquè proportionalium; unde factum est, ut quæ recipienda erat tanquam Definitio* quid nominis, *respiceretur ut conclusio Theorematica aliunde confirmanda*. Paucis: In eodem meo Opusculo clarissimè ostendo non Matrem, sed Filiam plurium præcedentium Demonstrationum esse debere illam *Definitionem*, quam nobis laudatus Vir tanquam origine primam commendare intendit.

Nondum tamen rem omnem a primis usque fibris discussi. Nam adhuc repræhendi ego possum, quòd illam Def. 8. 5. ita assumpserim juxta Clavium; quasi unâ aliquâ vice contingere non possit, ut multiplex primæ æqualis sit multiplici secundæ, dum multiplex tertiæ minor est multiplici quartæ; quin juxta quandam aliam assumptam ex æquo multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, dum multiplex tertiæ non excedit multiplicem quartæ; ac propterea unus quilibet priore loco dictus casus satis sit ad decernendum, quòd ratio primæ ad secundam major sit ratione tertiæ ad quartam, cum aliis ab Euclide consequenter demonstratis. Quare hoc loco rem totam discutiendam assumo.

Sint igitur quatuor (fig. 52.) magnitudines, prima *A*, secunda *B*, tertia *C*, & quarta *D*; vel omnes quatuor in eodem genere; vel priores quidem in uno, & aliæ duæ posteriores in alio ipsarum communi genere constitutæ. Assumptæ

etiam

etiam sint earundem, juxta præscriptum, æquè multiplices EF, IK, GH, LM; reperiaturque in uno tali casu EF quidem æqualis ipsi IK, at GH minor ipsâ LM. Dico proportionem primæ A ad secundam B majorem fore (juxta voces ipsas ab Euclide adhibitas in illâ Def. 8. 5.) proportione tertiæ C ad quartam D.

Demonstratur. Nam constat primò (ex Def. 6. 5.) hunc unicum casum sufficere, ut una proportio non dicatur esse alteri æqualis. Constat secundò (ex prædictâ Def. 8. 5.) unicum item casum sufficere, ut prima A dicatur habere ad secundam B majorem proportionem, quàm sit tertiæ C ad quartam D; si probetur unam aliquam esse multiplicationem inter præscriptas, juxta quam multiplex primæ A excedat multiplicem secundæ B, dum interim multiplex tertiæ C non excedit multiplicem quartæ D. Hunc verò casum demonstrandum assumo ex illo ipso casu proposito, in quo EF multiplex primæ A æqualis est ipsi IK multiplici secundæ B, dum GH multiplex tertiæ C minor est illâ LM multiplici quartæ D.

Esto enim portio NM excessus quo LM superat illam GH. Tum prædicta ipsa GH tali magnitudine XG augeri intelligatur, quæ & minor sit illo excessu NM, & sit pars quædam tertiæ C ab aliquo finito numero denominata. Deinde augeatur EF tali magnitudine FT, quæ sit pars primæ A, qualis XG pars est tertiæ C. Quoniam igitur sermo est de multiplicibus, sive per numeros integros, sive per fractos; erit ET æquè multiplex primæ A, ut XH est multiplex tertiæ C. Præterea manebunt, ut suprà, IK, & LM æquè multiplices secundæ B, & quartæ D. Atqui ET multiplex primæ A excedet tunc illam IK multiplicem secundæ B, dum interim XH multiplex tertiæ C adeò non excedit, ut immo deficiat a correspondente LM multiplici quartæ D. Igitur a casu proposito transitur demonstrativè

tivè ad alterum, qui exprimitur ab Euclide in illâ Def. 8. 5. Quare constat de veritate, quam demonstrandam assumpseram.

Neque hìc remorari quempiam debet, quòd sæpe assumam divisionem cujusvis datæ rectæ in quotlibet præscriptas æquales partes. Nam constat divisionem ejusmodi non indigere doctrinâ æquè proportionalium, ut videri potest apud Clavium, qui hanc divisionem demonstrat post Prop. 40. Libri primi. Neque etiam accusari hìc possum, quòd ordine quodam præpostero usus fuerim; quia nempe, resolvendo magis quàm componendo demonstrare multa debui illustrando Euclidi necessaria. Nam facile est, si placeat, ipsum naturæ ordinem sequi.

Et primò censeo Euclidæam æquè proportionalium Definitionem pulcherrimam esse; & quia conceptam per voces communi intelligentiæ facillimas, quales sunt *multiplicatio*, *majus*, *minus*, *æquale*; & quia compræhendentem, sine ullâ necessariâ discretione, omnes magnitudines, seu rationales, seu quomodolibet irrationales.

Secundò censeo excludendum esse indecorum illud Postulatum, sub nomine Axiomatis intrusum; cum sine illo, & ex solis aliunde notis, etiam problematicè procedi possit circa omnes & lineas rectas, & figuras itidem rectilineas, opportunè invicem comparatas; prout suprà non modò declaravi, verùm etiam ex parte demonstravi; unde utique opportunior postea, si opus sit, videri possit similis præsumptio circa reliquas omnes magnitudines.

Tertiò censeo, sine ullo adjecto extraneo Postulato, ex sola Euclidæa æquè Proportionalium Definitione tale elici posse veluti Axioma, quod tutissimè per omnem Geometriam versetur. Ejusmodi autem est: *Omnis magnitudo ad aliam quamlibet ejusdem generis magnitudinem habet rationem vel æqualem, vel majorem, vel minorem illâ, quæ est cu-*

jusvis

quavis alterius magnitudinis ad aliam quamlibet in suo earundem proprio genere constitutam magnitudinem. Tum verò, post duo alia a me demonstrata Lemmata, sic tandem stabilio integrum Axioma, quod sit immediatè utile in qualibet materia: *Habebit omnis quæpiam tertia magnitudo* C *ad quamlibet aliam quartam magnitudinem* D *in eodem cum ipsâ genere constitutam; vel rationem æqualem illi, quæ est cujusdam primæ magnitudinis* A *ad quamlibet secundam magnitudinem* B, *quæ in eodem suo proprio cum magnitudine* A *genere consistat; vel tertia illa magnitudo* C *habebit majorem rationem non modò ad magnitudinem* D, *verùm etiam ad aliquam magnitudinem majorem illâ magnitudine* D; *vel tandem habebit rationem minorem non modò ad prædictam magnitudinem* D, *verùm etiam ad aliquam magnitudinem eâdem magnitudine* D *minorem*.

Quòd autem Axioma ejusmodi opportunissimum sit, jam suprà ostendi, sumptâ experientiâ a secunda duodecimi. Sed idem rursum experiri volo sub tota sua generalitate, circa illam 18. 5. ut magis constet nullam fuisse, in ipso fermè Geometriæ initio, necessitatem illius intrusi Postulati.

Proponit ibi Euclides (fig. 53.) compositas magnitudines proportionales fore, si divisæ proportionales sint; ut putà, ita fore *AC* ad *BC*, ut *DF* ad *EF*; si divisæ proportionales sint; nimirùm, si ita sit *AB* ad *BC*, ut *DE* ad *EF*.

Demonstratur. Et primò non erit *AC* ad quandam *YC*, minorem eâ *BC*, ut *DF* ad *EF*; quia dividendo ita foret (ex præc. 17. 5.) *AY* ad *YC*, ut *DE* ad *EF*, sive (ex 11. 5.) ut *AB* ad *BC*; cum divisæ istæ magnitudines suppositæ sint proportionales. Hoc autem absurdum est, contra 8. ejusdem 5. ex qua constat rationem illius *AY* ad *YC* majorem fore ratione prædictæ *AB* ad *BC*.

 Simili

Simili modo ostendetur non esse *AC* ad quandam *AX*, minorem prædictâ *AB*, ut *DF* ad *EF*; quia uniformiter (ex prædictis 17. & 11. 5.) deberet esse *AX* ad *XC*, ut *AB* ad *BC*; contra eandem 8. 5.

Tum ex meo illo Axiomate, sub adnexis Lemmatis perfectè constituto, demonstro principale intentum. Nam *AC* ad *BC* habebit vel æqualem, vel minorem, vel majorem rationem, quàm *DF* ad *EF*. At non minorem, neque majorem; quia, in qualibet vicinitate punctorum *Y*, & *X* ad punctum *B*, erit semper (stante proportionalitate jam dictarum partium) ratio illius *AY* ad *YC*, major, & ratio illius *AX* ad *XC*, minor ratione prædictæ *AB* ad *BC*, sive *DE* ad *EF*. Igitur; ne factâ incidentiâ punctorum *Y*, & *X* in idem punctum *B*, ex liberâ permissâ destinatione, debeat esse ratio *AB* ad *BC* & major, & minor ratione illius *DE* ad *EF*; consequens est ita fore *AC* ad *BC*, ut *DF* ad *EF*; dum scilicet divisæ illæ magnitudines *AB*, *BC*, & *DE*, *EF* supponantur proportionales. Quod &c.

Sed quia hìc agitur de stabiliendo uno modo argumentandi circa magnitudines proportionales, qui frequentissimus est apud Geometras; nolo fidere (in hac summè abstractâ rationum similitudine) illi soli communi notioni; quòd, ubi consistitur in eodem infimo genere, non possit successivè ordinatim transiri de majori in minus, nisi transeundo per æquale. Itaque sic rursum argumentor ex eodem meo, noviter illustrato Axiomate. Nequit *AC* ad *BC* habere v. g. majorem rationem, quàm *DF* ad *EF*, quin majorem etiam habeat rationem ad quandam *XC*, majorem prædictâ *BC*, dum nempe aliàs supponatur ita esse *AC* ad *BC*, ut *DF* ad *EF*. Hæc autem simul stare non posse, ita demonstro.

Quandoquidem rursum (ex illo eodem meo Axiomate)

mate) haberet AC ad quandam TC, majorem illâ XC, rationem adhuc majorem, quàm sit ejusdem DF ad EF; atque ita semper usque ad ipsum punctum A. Hoc autem ex ipso Euclide certissimè absurdum est; quòd nempe magnitudo aliqua ad æqualem habeat majorem rationem, quàm tota quæpiam DF ad unam sui partem EF. Unicè igitur restat, ut harum rationum majorum unus quispiam sit terminus, si non intrinsecus, at saltem merè extrinsecus, ut putà in eo puncto T; adeò ut nempe habeat quidem AC ad TC rationem minorem, quàm DF ad EF; sed rursum ad quamlibet, minorem illâ TC, majorem rationem obtineat. Verùm hoc etiam repugnat meo illi Axiomati. Si enim habet AC ad TC minorem rationem, quàm DF ad EF, habebit etiam AC ad aliquam, quæ minor sit eâdem TC, minorem adhuc rationem illius DF ad EF. Non igitur subsistere potest terminus ille extrinsecus constitutus in illo quolibet designato puncto T. Inde autem fit, ut ratio AC ad BC nequeat esse major ratione DF ad EF. At simili modo ostendetur rationem DF ad EF majorem non esse ratione AB ad BC. Quare (ex illo meo Axiomate) unicè restat, ut ratio illius DF ad EF non nisi æqualis sit rationi ipsius AC ad BC, dum scilicet divisæ magnitudines AB, BC proportionales supponantur divisis magnitudinibus DE, EF. Quod erat &c.

Atque hæc satis jam sunt ad ostendendam illius Definitionis Euclidææ non modò certitudinem, verùm etiam opportunitatem ad repellendum intrusum illud, sub nomine Axiomatis, Postulatum.

LIBRI SECUNDI

PARS SECUNDA.

In qua expenditur quinta Definitio Libri sexti Euclidæi.

DEfinitio est, quæ sequitur: *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem.*

Definitionem hanc egregiè more suo elucidat Clavius, qui nempe ad Def. 10. Lib. 5. jam explicaverat, quo sensu una ratio dicatur penes Euclidem alterius cujusdam *duplicata*, *triplicata*, atque ita consequenter. Sed placet rem totam a primis usque initiis diligentiùs scrutari; nimirum hìc addendo, quæ in priore hujus Libri parte videri potuissent importuna.

Nam prælaudatus, Nationis nostræ Italicæ, eximius Geometra ipsam etiam Libri quinti Def. 3. accusat, ubi legimus: *Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam, secundùm quantitatem, habitudo*; ac similiter Def. 4. ubi habemus: *Proportionem esse harum rationum similitudinem*. Quasi verò (inquam ego) Definitiones illiusmodi quidquam amplius continere deberent, præter abstractos quosdam terminos, grammatico more ibi explicatos, sed postea per voces communi usu notissimas philosophicè explicandos, sine periculo ullius confusionis; prout fit in Definitionibus sextâ, & octavâ ejusdem Libri.

Quid verò, si latinus interpres malè posuerit *quantitatem*, cum magis debuerit scribere *quotitatem*, prout interpretatur, ac demonstrat ex Græco Euclidæo textu, omnimodè laudandus Joannes Vallisius? Tunc enim multò

magis,

magis, etiam ante subsequentes Definitiones, promptum foret intelligere non loqui ibi Euclidem de qualicunque habitudine, seu relatione unius magnitudinis ad alteram, sed de illa dumtaxat, juxta quam una vel est alteri æqualis, vel tali quodam modo alterâ major, aut minor. Ubi, ne quis erraret circa magnitudines invicem comparatas, notumque faceret se loqui de magnitudinibus ejusdem generis; subdit Definitionem quintam, in qua dicit: *Rationem inter se habere magnitudines, quæ possunt multiplicatæ sese mutuò superare*: Unde utique constat nullam esse v. g. cujusvis lineæ rationem ad quamlibet superficiem, quia nulla linea quantumvis multiplicata superare potest vel minimam quampiam superficiem.

Quo loco fateor præclarum Geometram Christianum Volfium bene observare in suis Elementis Arithmeticæ Cap. III. Schol. I. quòd tertia illa Euclidæa Definitio *videri potest incompleta*; quia nempe *dantur & aliæ magnitudinum relationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero continentur*: Ubi ex Trigonometria in exemplum affert relationem *sinus recti ad sinum complementi*. Quamvis enim certissimum sit talem esse habitudinem, seu relationem cujusvis sinus recti ad sinum correspondentis complementi, ut quadrata utriusque sinus simul sumpta æquent quadratum sinus totius; aliunde tamen scimus non eandem esse *rationem* cujusvis sinus recti ad sinum correspondentis complementi, quæ est alterius sinus recti ad sinum sibi correspondentis complementi. Unde infert non idem esse hac in re *habitudinem*, seu *relationem* ex una parte, & ex altera *rationem*, juxta communem Geometrarum intelligentiam.

Nihilominus dico, neque ex hoc capite accusari posse Euclidem. Nam in sua Definitione dicit; mutua *quædam* secundùm quantitatem *habitudo*. Qui autem dicit

quan-

quandam habitudinem, certè non vult comprehendere omnes habitudines, seu relationes. Et hìc rursum expendere debeo ly *secundùm quantitatem*. Quis enim putet loqui ibi Euclidem de *quantitate* metaphysico more expensâ, juxta quam unum corpus dicitur alteri naturaliter impenetrabile; & non magis loqui de *extensione* in suo tali quodam genere, juxta quam una magnitudo dicitur, relatè ad alteram, vel æqualis, vel major, vel minor? Et sanè ad interrogationem *quanta sit* quæpiam linea recta, respondebitur v. g. palmaris, bipalmaris, tripalmaris, aut alio quovis modo, cum relatione (seu per numeros integros, seu per fractos, sive etiam per minutiam) ad palmum, aut ad aliam longitudinem jam notam. Atque ita uniformiter circa alias cujusvis generis magnitudines.

Unde infero tertiam illam Def. Euclidæam nulli querelæ obnoxiam esse, etiamsi inspiciatur seorsùm a consequentibus. Quòd enim prælaudatus Christianus Volfius *rationem* definiat *esse eam homogeneorum relationem, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius sine tertio homogeneo assumpto*, verissimè quidem dicit; quia hinc manifestum fit, non omnem *relationem*, etiam constantem, unius talis magnitudinis ad alteram, ut putà sinus recti ad sinum complementi, esse *rationem*; cum quantitas sinus complementi determinari non possit ex quantitate sinus recti, nisi assumatur tertium homogeneum, quale est sinus totus: sed non ideo repræhendi hinc potest Euclides, quasi *incompletè* definiverit; cum hæc ipsa discretio manifesta sit in illis suis vocibus *secundùm quantitatem*, acceptâ nimirum *quantitate* pro *quotitate*, prout certissimè intelligi sic debere paulò ante declaravi, sumpto argumento ex interrogatione super *quantitate* talis cujusdam propositæ magnitudinis. Atque ita a prima usque ætate intellectum a me fuisse Euclidem, fateri omnibus possum. Hoc autem stante

vix

vix intelligo, quomodo dubitari possit, an ex quantitate unius magnitudinis decerni possit immediatè quantitas alterius, dum aliàs nota sit prædicta unius ad alteram *secundùm quantitatem* habitudo: Nam qualiter una illarum nota erit, taliter rursum, sine alio extrinsecùs assumpto, nota erit etiam altera ex illa sola præcognita habitudine.

Post hæc gradum facio ad illam quintam Def. sexti: Ubi dico falsissimum esse, quòd sub specie simplicis Definitionis Axioma quoddam intrudatur, non permittendum sine demonstratione.

Et primò: Si sermo sit de magnitudinibus in suo tali quodam ordine commensurabilibus, sive rationem inter se habentibus, quæ est alicujus numeri (aut integri, aut fracti, aut cujusvis minutiæ) ad alium quempiam hujusmodi numerum, ita ut nempe prima quædam magnitudo *A* per talem quempiam seu numerum, seu minutiam multiplicata, æqualis fiat secundæ magnitudini *B*; adeò clarè, & immediatè ostendetur veritas illius Definitionis, ut etiam Axiomatis loco æquissimè censeri possit.

Sint enim quatuor quælibet (fig. 54.) ejusdem generis magnitudines, prima *A*, secunda *B*, tertia *C*, & quarta *D*, prædicto modo invicem rationales. Dico rationem primæ *A* ad quartam *D* componi ex rationibus magnitudinum intermediarum, hoc est primæ *A* ad secundam *B*, secundæ *B* ad tertiam *C*, & tertiæ *C* ad quartam *D*. Scilicet dico magnitudinem *A* toties contineri in magnitudine *D* (sumpto ly *toties* pro quolibet numero, sive integro, sive fracto, sive unitate, aut qualibet ipsius unitatis minutiâ) quotus fuerit numerus ortus, aut quælibet unitatis minutia, ex ductu inter se numerorum prædicto modo sumptorum, qui significent quoties magnitudo *A* continetur in magnitudine *B*, hæc in magnitudine *C*, & ista in magnitudine *D*. Sint porrò isti numeri *T*, *X*, *Y*, qui inter

se

se ducti procreent numerum *Z*.

Jam sic. Constat, quòd magnitudo *A* multiplicata per numerum *T* facit magnitudinem *B*, & hæc multiplicata per *X* facit magnitudinem *C*, quæ rursum multiplicata per *Y* facit magnitudinem *D*. Igitur *A* in *T*, in *X*, in *Y* producit magnitudinem *D*. Ponitur autem, quòd numeri *T*, *X*, *Y* inter se multiplicati faciant numerum *Z*. Igitur magnitudo *A* multiplicata per numerum *Z* facit eam magnitudinem *D*. Rursum constat, quòd numerus *T* exprimit illam quantitatem, seu *quotitatem*, juxta quam prima magnitudo *A* taliter se habet ad secundam magnitudinem *B*, nimirum prout unitas se habet ad eum numerum *T*; atque ita uniformiter de secunda magnitudine *B* relatè ad tertiam *C*, prout unitas se habet ad eum numerum *X*; ac tandem de hac tertia *C* ad quartam *D*, prout unitas se habet ad reliquum numerum *Y*.

Simili modo ostendetur exhiberi ab eo numero *Z* (qui nempe oritur ex ductu prædictorum inter se numerorum *T*, *X*, *Y*) illam quantitatem, seu *quotitatem*, juxta quam prima magnitudo *A* taliter se habet ad quartam magnitudinem *D*, nimirum prout unitas se habet ad eundem numerum *Z*. Cum ergo hic numerus *Z* compositus sit ex prædictis numeris *T*, *X*, *Y*, manifestum fit nos esse in casu illius Def. Euclidææ. Si enim quantitates, seu quotitates rationum primæ *A* ad secundam *B*, secundæ *B* ad tertiam *C*, ac tandem tertiæ *C* ad quartam *D*, invicem multiplices, gignaturque quantitas, seu quotitas *Z*, hæc porrò exhibebit rationem primæ magnitudinis *A* ad quartam *D*, rationem idcirco compositam ex rationibus magnitudinum intermediarum. Quod utique erat demonstrandum.

Tum secundò: non diffiterer istud ipsum demonstrari a me posse, dum sermo sit de magnitudinibus quomodòlibet irrationalibus. Sed non vacat tantum laborem im-

pen-

pendere in re non necessariâ. Nam dico non nisi iniquè hac in parte Euclidis nomen vexatum fuisse; quia nempe (ad ipsius usum) nullam ibi veritatem proponit præter eam, quæ in usu *puri nominis* consistit. Ad quod explicandum, seu mavis demonstrandum, capere licet exemplum ex Propos. 23. lib. 6. in qua Euclides demonstrat æquiangula parallelogramma eam inter se rationem habere, quæ ex rationibus laterum componitur.

Sint enim duo talia parallelogramma (fig. 55.) unum *ABCD*, & alterum *CEFG* ita constituta, ut anguli ad punctum *C* sint æquales, ac propterea in unam rectam lineam coeant ipsæ *BCG*, & *DCE*: Tum compleatur alterum parallelogrammum *BCEH*, fiatque, ut latus *BC* unius parallelogrammi ad latus *CG* alterius, ita recta quæpiam linea *I* ad *K*, & ut latus *DC* ad latus *CE*, ita illa *K* ad alteram *L*. Jam sic. Constat (ex 1. sexti) parallelogrammum *AC* ita fore ad parallelogrammum *CH*, ut basis *DC* ad basim *CE*, sive (ex 11. quinti) ut *I* ad *K*. Rursum, eodem jure, parallelogrammum *CH* ita erit ad parallelogrammum *CF*, ut basis *BC* ad basim *CG*, sive (ex eâdem 11. quinti) ut *K* ad *L*. Igitur ex æquo (nimirum ex 22. quinti) ita erit parallelogrammum *AC* ad parallelogrammum *CF*, ut *I* ad *L*.

Atque id est, quod intelligit Euclides, dum dicit rationem unius parallelogrammi ad alterum æquiangulum parallelogrammum componi ex rationibus laterum: Id enim unicè vult, ut ratio prædicta æqualis sit rationi cujusdam rectæ lineæ *I* ad alteram *L*, inter quas interponatur quæpiam *K*, per quam continuentur duæ rationes æquales rationibus prædictorum laterum; dum scilicet ita sit *I* ad *K*, ut latus *DC* unius parallelogrammi ad latus *CE* alterius; & rursum ita sit *K* ad *L*, ut est prioris parallelogrammi alterum latus *BC* ad alterum posterioris parallelogrammi latus *CG*.

S Eo-

Eodem planè modo interpretari debemus Propof. 19. & 20. ejuſdem Sexti, in quibus legimus ſimilia triangula, & quælibet ſimilia itidem poligona, duplicatam habere inter ſe eam rationem, quæ eſt lateris homologi ad latus homologum. Ibi enim nihil aliud demonſtrari debere intelligitur, niſi quòd ratio unius trianguli, aut poligoni, ad alterum ſimile triangulum, aut poligonum, æqualis ſit rationi cujuſdam rectæ lineæ *I* ad alteram *L*, inter quas interpoſita ſit quæpiam *K*, per quam continuentur duæ rationes æquales illi, quæ eſt cujuſdam lateris unius trianguli, aut poligoni ad latus homologum alterius trianguli, aut poligoni.

Præterea (ut nullus ſuperſit dubitationi locus) ſimili itidem modo interpretari debemus Propoſ. 33. undecimi, ubi legimus: Similia ſolida parallelepipeda eſſe inter ſe in triplicata ratione laterum homologorum. Nam ibi nihil aliud demonſtrandum aſſumitur, niſi quòd ratio unius parallelepipedi ad alterum ſimile parallelepipedum æqualis ſit rationi cujuſdam rectæ lineæ *H* ad alteram *L*, inter quas duæ quædam *I*, & *K* interpoſitæ ſint, per quas continuentur tres rationes æquales illi, quæ eſt cujuſdam lateris unius parallelepipedi ad latus homologum alterius parallelepipedi.

Sed nolo diſſimulare, quòd jam inutilis fieret illa Definitio, ſuper qua diſputamus. Nam reſpondeo voluiſſe utique Euclidem rationem veluti reddere nominis ab ipſo aſſumpti, ita ut nempe ad eum modum una aliqua ratio intelligatur ex pluribus rationibus componi, quo unus quiſpiam numerus ex pluribus numeris invicem multiplicatis exoriri intelligitur, & componi; ſed eâ tamen nuſquam violatâ lege, ut nunquam ad demonſtrandum eam definitionem adhibeat, niſi antea ita omnes terminos diſponat, ut locum habere poſſit demonſtratio *ex æquo* juxta

præ-

prædictam 22. quinti. Atque ita semper faciunt omnes magni Geometræ tam veteres, quàm recentiores; quod sanè necessarium præsertim est, ubi componendæ invicem sint rationes magnitudinum diversorum generum, ut putà linearum, planorum, solidorum, velocitatum, temporum, & ejusmodi. Tunc enim certum est has omnes rationes ex utrâque parte reduci primùm debere ad unam aliquam talium magnitudinum speciem, ut postea detur locus alicui argumentationi *ex æquo*; nimirum vel ad probandam (ex illa 22. quinti) æqualem rationem inter extremas; vel ad probandam inter easdem unam rationem alterâ majorem, ex unâ aliquâ consequentium ejusdem Libri quinti Propositionum. Unde tandem constat, illam 5. Def. sexti nulli difficultati obnoxiam esse; utpotè quæ *solius nominis* impositionem decernit, nulli postea ad demonstrandum usui futuram.

APPENDIX.

Atque hìc opportunum est observare, nullius Analyticæ ope decerni posse rationem datæ cujusdam figuræ, etiamsi rectilineæ, ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam, nisi priùs stabilitum supponatur Euclidæum illud Axioma, unde pendet doctrina parallelarum.

Demonstratur. Præmitto autem communes esse Analyticæ, & Arithmeticæ vulgari, regulas omnes additionis, subtractionis, divisionis, & extractionis radicum; quousq; nempe in eodem infimo jam stabilito entis genere consistitur. At ubi transire oporteat de genere in genus, ut putà (per multiplicationem, seu ductum cujusdam rectæ lineæ in alteram rectam lineam) de mera longitudine in superficiem planam; tum consimiliter de hac (per quandam

dam rursum rectam lineam multiplicatâ) in solidum trinæ dimensionis; atque ita ascendendo per novas multiplicationes ad altiores conceptibiles gradus plurium dimensionum; quod utique uniformiter valet de divisione, per quam ad inferiores gradus descenditur: Tunc enimverò censeo, nullum ab Analytica subministrari posse Principium, quo fulciantur præscriptæ ab ipsa operationes ad assequendam veritatem.

Nam constat duas intelligi posse figuras rectilineas, unam (fig. 55.) *DABC*, & alteram *CEFG*; quarum & noti sint anguli ad puncta *D*, *C*, *G*, ut putà omnes quatuor recti; & rursum nota sint perpendicula *DA*, *CB*, *CE*, *GF*, nimirum æqualia singula uni palmo; ac tandem notæ sint ipsæ bases *DC*, *CG*; prior quidem v. g. unius palmi, & altera duorum. Ex his autem rursum constat, datas fore positione ipsas rectas *AB*, *EF*, nimirum jungentes ipsarum extrema puncta, quæ supponuntur data in sua tali positione.

His positis: audire cupio ab Analyticâ Principium aliquod, ex quo decerni possit ratio prioris rectilineæ figuræ *DABC* ad alteram itidem rectilineam *CEFG*. Respondebit quispiam rationem esse, ut basis *DC* ad basim *CG*; addetque demonstrari id posse (jure quodam Analyticæ proprio) ex 18. septimi; ubi habemus, numeros genitos ex duobus, unum quempiam multiplicantibus, eandem inter se habere rationem, quam multiplicantes.

Et ego quidem non renuo jus quoddam hac in parte proprium Analyticæ præ Arithmeticâ vulgari. Itaque agnosco rectam *DA*, quæ ad angulos rectos semper excurrat super rectâ *DC*, quoad usque congruat ipsi *CB*, toties multiplicari, quot sunt quomodolibet distinguibilia puncta in eâdem *DC*; adeò ut propterea superficies quædam *DABC* intelligi possit genita ex illâ *DA* multiplicatâ tâ per *DC*. Tum simili rursum modo agnosco, rectam *CE*, quæ ad angulos rectos semper excurrat super rectâ *CG*, quoad usque congruat ipsi *GF*, toties multiplicari, quot sunt quomodolibet distinguibilia puncta in eâ *CG*; adeò ut similiter superficies quædam *CEFG* intelligi possit genita ex prædictâ *CE*, sive ipsius æquali *DA*, multiplicatâ per *CG*.

At hoc opus, hic labor: Decernere enim oportet, quænam sint istæ superficies genitæ, una *DABC*, & altera *CEFG*, circa quas demonstratum agnosco fore eas inter se, ut bases *DC*, *CG*.

Si enim præsumere quis velit non alias esse modò dictas superficies, præter illas, quas jam supposuimus concludi a duabus illis rectis, unâ *AB*, & alterâ *EF*, jungentibus extremitates illorum quatuor æqualium perpendiculorum, quæ supponuntur in eodem plano insistere rectis *DC*, *CG*: Is enimverò convinci posset de manifestâ petitione principii; cùm id ipsum maximè inquiratur, an scilicet utraque linea jungens extremitates etiam intermediorum perpendiculorum sit ipsa etiam linea recta, & non magis aut semper cava, aut semper convexa versùs partes suæ basis, juxta diversam hypothesin aut anguli acuti, aut anguli obtusi; quod quidem satis constat ex dictis in secunda Parte mei primi Libri.

Præterea non renuo, quin demonstrari uniformiter possit ab Analyticâ, quòd ratio unius superficiei genitæ *DABC* ad alteram superficiem genitam *CEFG* (quamvis ipsæ *DA*, & *CE* ponantur invicem inæquales) componatur ex rationibus perpendiculi *DA* ad perpendiculum *CE*, seu perpendiculi *CB* ad perpendiculum *GF*; ac rursum basis *DC* ad basim *CG*; dum scilicet ipsæ *AB*, *EF* ponantur jungere extremitates omnium æqualium perpendiculorum a subjectis basibus erectorum: Atque id insuper

multis

multis aliis modis. At semper manebit quæstio circa jungentes extrema puncta illorum perpendiculorum. Quapropter tandem statuo recurri semper oportere ad Geometriam, quæ nempe ex illo stabilito Euclidæo Axiomate demonstret naturam talium linearum.

Ex quibus omnibus satis constat, nullius Analyticæ ope decerni posse rationem datæ cujusdam figuræ, etiamsi rectilineæ, ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam, nisi priùs stabilitum supponatur Euclidæum illud Axioma, unde pendet doctrina parallelarum. Quod &c.

Atque hæc sufficere jam possunt ad vindicandum Euclidem a nævis eidem objectis.

FINIS TOTIUS OPERIS.